Feuille d'exercices à préparer pour le jour de la rentrée

Dans tout ce T.D. on se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct (O, i, j)

1. réflexion sur le cours:

1. Ecrire l'équation cartésienne de la droite :

   a) passant par $(1, 2)$ de vecteur directeur $i - 2j$

   b) passant par $(1, 2)$ orthogonal à $i - 2j$

   c) tangente en $(1, 1)$ au cercle $x^2 + y^2 - 2x = 0$

2. Calculer la distance du point $P = (1, 1)$

   a) à la droite $x + 2y = 0$

   b) à la droite passant par $A\,(1, 2)$ et $B(-1, 1)$

3. Soit la conique C d'équation $x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y = 0$

   a)Déterminer son intersection avec les axes du repère

   b) Déterminer son centre Ω puis déterminer l'équation de C dans le repère (Ω, i, j)

   c) Déterminer les axes de C . . Donner l'équation réduite de la conique . quelle est sa nature ?

   d) donner dans le repère (O, i, j) une équation paramétrique de C

4. Pour chacune des courbes suivantes l'origine est un point singulier . Déterminer à chaque fois la tangente en O et la nature du point singulier.

   dessiner le graphe de la courbe au voisinage de O

   a) $x = t^2 + t^3$, $y = t^2 + 3t^3 + t^6$

   b) $x = t^2 + t^4$, $y = t^2 + 3t^3 + t^6$

   c) $x = t^2 + t^4$, $y = t^2 + 3t^4 + t^6$

   d) $x = t^3 + t^4$, $y = 2t^3 + 3t^4 + t^6$

   e) $x = t^3 + t^5$, $y = 3t^5 + t^6$

5. Pour chacune des courbes suivantes on a une branche infinie si t tend vers $+\infty$. Déterminer la direction asymptotique. Etudier si il existe une asymptote , et si oui calculer son équation.

   a) $x = t^2 + 3 + 1/t$, $y = t^3 - 1/t$

   b) $x = t^2 + 3 + 1/t$, $y = t^2 - 1/t$

   c) $x = 1/t^2 + 3 + 1/t$, $y = t^3 - 1/t$

   d) $x = t^3 + 3 + 1/t$, $y = t^2 - 1/t$

   e) $x = t^2 + 3t + 1/t$, $y = t^3 - 1/t$

6. Soit f une fonction C^2 sur un intervalle I et la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$. On note $M(\theta)$ le point $M(\theta) = f(\theta)u_\theta$ et C la courbe décrite par M si θ décrit I

   a) calculer $\det(M\prime(\theta), M"(\theta))$ en fonction de $f; f'$ et $f"$.

   b) En déduire la condition nécessaire et suffisante portant sur f et ses dérivées pour qu'un point $M(\theta) \neq 0$ soit un point d'inflexion de C

   c) Si $f(\theta) \neq 0$ on pose $u(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$, calculer $u"$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u et ses dérivées pour qu'un point $M(\theta) \neq 0$ soit un point d'inflexion de C

7. Construire le graphe des courbes d'équation polaire (il s'agit de courbes usuelles)

   a) $r = \cos(\theta) + \sin(\theta)$

   b) $r = \frac{1}{3\cos(\theta)+4\sin(\theta)}$

   c) $r = \frac{2}{1+\sin(\theta)}$

2. exercices

1. Soit ABC un triangle non aplati . On peut choisir un repère orthonormé direct tel que l'axe $x'Ox$ soit confondu avec BC et l'axe $y'Oy$ avec la hauteur issu de A.

   Il existe donc trois réels (a, b, c) tels que ans ce repère les coordonnées des sommets soient : $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$

   1. Calculer les coordonnées du centre de gravité G , de l'orthocentre H , du centre du cercle circonscrit Ω du triangle
   2. Montrer que Ω, G, H sont alignés.

2. Soit l'arc paramétré dont on veut tracer le graphe : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 + 1/t \\ y(t) = t^2 + 1/t^2 \end{array}\right.$

   - étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$.
   - Etudier les branches infinies .
   - Calculer les coordonnées du point double

3. Tracer l'arc paramétré d'équation polaire
$$r = \tan(\theta/3)$$
   Donnez les symétries de la courbe

   Vous donnerez un domaine d'étude aussi petit que possible. On se placera désormais sur ce domaine.

   Précisez si la courbe passe par 0 et quelle est alors la tangente en 0

   Déterminez l'intersection avec les axes de coordonnées et précisez la tangente en ces points.

   Etudiez la branche infinie.

   En utilisant les résultats d'un exercice de la première partie étudiez les points d'inflexion de la courbe.

   Tracez le graphe de la courbe

4. Etudier l'arc paramétré : $\begin{array}{c} x(t) = 3t^2 - 2t^3 \\ y(t) = 4t - t^4 \end{array}$

   Vous préciserez les variations de x et y , la nature des branches infinies , la tangente et la nature du point singulier , le nombre de points d'inflexion.

   vous finirez en donnant un graphe de la fonction.

5. Soit l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t^3 \\ y(t = 3t^2 \end{array}\right.$

   1. Construire son graphe
   2. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales au graphe

6. Soit les arcs C_λ : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{t}{\lambda+t^2} \\ y(t) = \frac{t^2+1}{t(\lambda+t^2)} \end{array}\right.$

   - tracer les courbes C_0, C_1 et C_2
   - Déterminer l'ensemble V des points à tangente verticales quand λ décrit $\mathbb{R}$
   - Construire ce lieu .

7. Etude de l'arc paramétré d'équation polaire $\rho = \frac{\theta}{\theta-1}$

   Vous donnerez les variations de ρ , les points d'intersections avec l'axe $x'Ox$ et la tangente en ces points , la nature de la branche infinie si θ tend vers 1 . Que se passe-t-il si θ tend vers $\pm\infty$.

   Tracez le graphe de la courbe.

8. Etudier l'arc paramétré d'équation polaire :$r(\theta) = \frac{1-2\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}$

   Préciser le signe de $r(\theta)$, les tangentes à l'origine, le point double .Montrer qu'il existe une branche infinie de direction asymptotique verticale, Vérifier que ce n'est pas une asymptote ,puis qu'il existe une parabole asymptote.

9. Soit la courbe paramétrée $M(t)$ $\left\{\begin{array}{l} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{array}\right.$

   tracer la courbe

   Déterminer le lieu du point $P(t)$ projection orthogonal de l'origine sur la tangente en $M(t)$

   Donner une équation polaire de ce lieu . Le tracer