Devoir sur table numéro 1

Toutes les figures sont sur des feuilles annexes

Problème I

1.

(a) la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $-2x+2$. donc $\boxed{\begin{array}{c} f \text{ croît sur }]-\infty,1] \\ f \text{ décroît sur } [1,+\infty[\end{array}}$

(b) $f(x)-x=-x^2+x+1$: équation du second degré avec $\Delta=5$. On a deux racines réels distincts :

$$\boxed{l_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, l_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(c) $f(x)-l_1=-x^2+2x+(1-l_1)$ est une équation du second degré ayant une racine évidente l_1 Comme la somme des racines vaut 2 on a $L_1=2-l_1$

$$\boxed{L_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

la résolution "directe" de l'équation donne $L=1+\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ et les deux quantités sont égales car $\left(1+\sqrt{5}\right)^2=6+2\sqrt{5}$. cette résolution masque aussi que la seconde racine est l_1 .

(d) $f(x)-x$ est une équation du second degré de coefficient dominant strictement négatif et ayant deux racines réelles . $f(x)-x$ est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.

$$\boxed{\begin{array}{c} x\in]l_1,l_2[\Longrightarrow f(x)>0 \\ (x=l_1 \text{ ou } x=l_2) \Longrightarrow f(x)=0 \\ x\notin [l_1,l_2] \Longrightarrow f(x)<0 \end{array}}$$

(e) figure (1.1)

(f) et (g) figure 1.2

2.

(a) figures 1.3 et 1.4 (figures séparées faute de couleur)

on remarque que dans le premier cas il semble y avoir un escalier qui diverge vers $-\infty$, et dans le second une spirale qui diverge.

(b) Si la suite (u_n) converge vers λ alors (u_{n+1}) converge aussi vers λ et $\left(u_n^2\right)$ converge vers λ^2 . donc par linéarité de la limite

$$\lambda=-\lambda^2+2\lambda+1$$

et donc $\boxed{\lambda\in\{l_1,l_2\}}$

(c) comme $n\geq 1$: $u_n=f(u_{n-1})$ (u_{n-1} est bien défini) . or d'après les variations de f on a $2=\max\limits_{\mathbb{R}}(f)$, donc

$$\boxed{\forall n\geq 1 \ , \ u_n\leq 2}$$

3.

-> par récurrence

- $u_0=l_1$
- si $u_n=l_1$ alors $u_{n+1}=f(u_n)=f(l_1)=l_1$

$$\boxed{u_0=l_1 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N} \ , \ u_n=l_1}$$

-> par récurrence:

- $u_0=1$ donc $u_1=2$,
- si $u_{2p}=1$ alors $u_{2p+1}=2$ puis $u_{2p+2}=1$ et donc

$$\boxed{u_0=1 \Longrightarrow \forall p\in\mathbb{N} \ , \ u_{2p}=1 \text{ et } u_{2p+1}=2}$$

4.

(a) sur $]-\infty,l_1[$ on a vérifié que la dérivée f' est strictement positive. Donc f croît strictement : $x<l_1 \Longrightarrow f(x)<f(l_1)=l_1$ D'où une récurrence

- $u_0 < l_1$
- $u_n < l_1 \Rightarrow u_{n+1} < l_1$
- et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < l_1$

(b) d'après l'étude du signe de $f(x) - x$ sur $]-\infty, l_1[$ on a : $u_n < l_1 \Rightarrow f(u_n) < u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

(c) la suite est décroissante ; si elle converge elle admet une limite $\lambda < u_0$. Or on sait que les seules limites possibles sont l_1 et l_2 supérieures ou égales à l_1 : absurde

la suite diverge et comme elle décroît

$$\boxed{\lim_{+\infty}(u_n) = -\infty}$$

5. si $u_0 > L_1$, la décroissance stricte de f sur $[1, +\infty[$ assure que $u_1 = f(u_0) < f(L_1) = l_1$. la question précédente montre alors que

$$\boxed{\lim_{+\infty}(u_n) = -\infty}$$

6.

(a) sur $[1, 2]$ la fonction f décroît strictement (dérivée strictement négative sauf en un seul point) ; donc

$$1 < u_0 < l_2 \Rightarrow f(l_2) < f(u_0) < f(1) \Longrightarrow l_2 < u_1 < 2$$

(b) $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1)} = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n)) = f \circ f(v_n)$ et idem pour w_n

(c) On fait une récurrence en utilisant deux fois que sur $[1, 2]$ la fonction f décroît strictement :

- $v_0 = u_0 \in]1, l_2[$
- si $v_n \in]1, l_2[$ alors $u_{2n+1} = f(v_n) \in]l_2, 2[$ puis $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \in]1, l_2[$
- donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} , v_n \in]1, l_2[}$

et de même pour w_n

(d) $f \circ f(x) = -(-x^2 + 2x + 1) + 2(-x^2 + 2x + 1) + 1 = ...$ on peut développer mais c'est inutile.

(e) $f \circ f(x) - x$ est une équation polynôme de degré 4. Pour résoudre il faut "deviner" des racines. Ici tout est dans le sujet .

- l_1 et l_2 sont racines car $f(x) = x \Rightarrow f \circ f(x) = x$
- 1 et 2 sont racines (cf **Q3)** $f \circ f(1) = f(2) = 1$ et $f \circ f(2) = f(1) = 2$
  pour traiter la question il suffit de deviner 2 racines , car on peut alors factoriser un trinôme du second degré , et il reste un trinôme du second degré à résoudre.

(f) on peut donc factoriser , connaissant les racines et le coefficient dominant (-1)

$$f \circ f(x) - x = -(x - l_1)(x - l_2)(x - 1)(x - 2)$$

d'où le tableau de signe sur $]1, 2[$

$$\begin{gathered} 1 < x < l_2 \Rightarrow f \circ f(x) < x \\ x = l_2 \Rightarrow f \circ f(x) = x \\ l_2 < x < 2 \Rightarrow f \circ f(x) > x \end{gathered}$$

(g) On reprend les idées de **Q4**:

$v_n \in]1, l_2[\Rightarrow f(v_n) < v_n \Rightarrow v_{n+1} < v_n$. La suite décroît , or elle est minorée par 1 . elle converge donc vers une limite $\Lambda \in [1, v_0] \subset [1, l_2[$. or par continuité de la fonction f, Λ est racine de $f \circ f(x) = x$ et donc $\Lambda = 1$

Idem pour w_n

$$\boxed{\lim(v_n) = 1 \ , \ \lim(w_n) = 2}$$

(h) Les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des limites différentes .

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge}}$$

7. si $u_0 \in]l_2, 2[$ les calculs précédents donnent $u_1 \in]1, l_2[$ et donc d'après la question précédente la suite diverge

8.

(a) D'après le tableau de signe de $f(x)-x$ sur $]l_1,1]$, $f(x)>x$ donc $u_1>u_0$

(b) La suite (u_n) est majorée par $2=\max(f)$. Si la suite (u_n) était strictement croissante , elle convergerait donc . Sa limite serait donc l_2 (l'autre limite est inférieure strictement à u_0) . Or $l_2>1$. Donc la suite serait strictement plus grande que 1 à partir d'un certain rang N (et plus petite que 2). On a alors trois cas :

$u_N\in]1,l_2[$ la suite divergerait d'après **Q6** . absurde car la suite converge
$u_N=l_2$ alors $u_{N+1}=f(l_2)=l_2$; absurde car la croissance est stricte
$u_N\in]l_2,2[$ la suite divergerait d'après **Q7 .** absurde car la suite converge

(c) On pose $A=\{N\in\mathbb{N},u_N\geq u_{N+1}\}$.

- l'ensemble A est non vide car la suite n'est pas strictement croissante.
- On a un sous ensemble non vide de$\mathbb{N}$ donc il admet un plus petit élément n_0 solution du problème. et $n_0\geq 1$ car $u_0<u_1$ . .

(d) on a $u_{n_0}>f(u_{n_0})$ donc d'après le tableau de signe de $f(x)-x$: $u_{n_0}<l_1$ ou $u_{n_\circ}>l_2$ le premier cas est impossible car $u_{n_0}>u_0>l_1$ .donc $u_{n_0}>l_2$. De plus $n_0\geq 1$ donc $u_{n_0}=f(u_{n_0-1})\leq 2$

(e) donc

- si $u_{n_0}=l_2$ alors (récurrence) la suite est stationnaire égale à l_2 , donc convergente
- si $u_{n_0}=2$ la suite pour $n\geq n_0$ est périodique: $2,1,2,1,\cdots$ divergente.
- sinon $u_{n_0}\in]l_2,2[$ et donc la suite diverge d'après **Q7**

9. synthèse : on étudie tous las cas possibles en commençant par se limiter à $]-\infty,2]$ plus grand sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant u_1

- $u_1<l_1$: suite divergente vers $-\infty$
- $u_1=l_1$: suite constante donc convergente et stationnaire.
- $u_1\in]l_1,1[$: la suite diverge sauf si elle est stationnaire d'après **Q8**
- $u_1=1$: la suite diverge d'après **Q3**
- $u_1\in]1,l_2[$ la suite diverge d'après **Q6**
- $u_1=l_2$ suite constante donc convergente et stationnaire.
- $u_1\in]l_2,2[$ la suite diverge d'après **Q7**
- $u_1=2$ suite périodique divergente comme pour $u_1=1$

$$\boxed{\text{la suite converge si et seulement si elle est stationnaire}}$$

Problème II

1. On a par hypothèse $F\begin{pmatrix}0\\p/2\end{pmatrix}$ donc $K\begin{pmatrix}0\\-p/2\end{pmatrix}$. on a donc bien $OK=OF$ donc $O\in P$; de plus FOK sont alignés sur l' axe $x'Ox$ donc O est le milieu du segment $[FK]$

2.

(a) D est la droite $y=-p/2$, donc H a des coordonnées $\begin{pmatrix}x_H\\-p/2\end{pmatrix}$. H étant la projection de M sur D droite verticale HM est horizontale donc $H\begin{pmatrix}x\\-p/2\end{pmatrix}$

(b) On a donc :

$$M\in P\iff MF^2=MH^2\iff(-x)^2+\left(\frac{p}{2}-y\right)^2=0^2+\left(\frac{-p}{2}-y\right)^2\iff x^2-2py=0\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2p}$$

remarque :aucune division , ni simplification dans le calcul on peut prendre le risque d'une équivalence.

(c) On passe en polaire $\left\{\begin{array}{l}x=r\cos(\theta)\\y=r\sin(\theta)\end{array}\right.$:

- $M \in P \Longrightarrow r^2\cos(\theta)^2 = 2pr\sin(\theta)$
  - si $r \neq 0$ et $\cos(\theta) \neq 0$: $r = \dfrac{2p\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$
  - si $r = 0$ $M = O$ est un point de la parabole et un point de la courbe en polaire pour $\theta = 0$
  - si $\cos(\theta) = 0$, $x = 0$ donc $y = 0$ (d'après l'équation de P) et on retrouve le cas précédent
- réciproquement si $r = \dfrac{2p\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$, $\theta \neq \pi/2[\pi]$, alors $y = \dfrac{2p\sin(\theta)^2}{\cos(\theta)^2}$ et $\dfrac{x^2}{2p} = \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{2p\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 = \dfrac{2p\sin(\theta)^2}{\cos(\theta)^2}$ donc $y = \dfrac{x^2}{2p}$
- On peut remarquer que $\begin{array}{c} r(\theta+2\pi) = r(\theta) \text{ donc } M(\theta+2\pi) = M(\theta) \\ r(\theta+\pi) = -r(\theta) \text{ donc } M(\theta+\pi) = M(\theta) \end{array}$. On peut se limiter à $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$

$$\boxed{\text{une équation polaire de } P \text{ est } \forall\theta \in]-\pi/2,\pi/2[\ ,\ r(\theta) = \dfrac{2p\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}}$$

  en utilisant $r(-\theta) = -r(\theta)$ on peut si besoin est se limiter à $[0, \pi/2[$ et compléter par symétrie par rapport à Oy .

3. figure II.1
4. figure II.2

   Soit f la fonction $x -> \dfrac{x^2}{2p}$

   (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\dfrac{x}{p}$. Une équation de la tangente est $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ d'où en reportant

$$\boxed{y = \frac{x_0}{p}x - \frac{x_0^2}{2p}}$$

   En particulier si $x_0 = 0$, d est la droite d'équation $y = 0$ donc l'axe $x'Ox$. (c'est plus une vérification du calcul qu'autre chose)

   (b) un vecteur directeur de la tangente est $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0/p \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{FH_0} = \begin{pmatrix} x_0 - 0 \\ -p/2 - p/2 \end{pmatrix}$; Le produit scalaire des deux vecteurs est nul , donc la tangente est orthogonale à la droite FH_0 .

   (c) Par hypothèse $MH_0 = MF$ donc le triangle H_0M_0F est isocèle en M_0 . la hauteur est donc aussi bissectrice intérieure de l'angle.

   (d) par le calcul : on pose $f_0\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$ et on écrit le système $\begin{cases} f_0 \in T_0 : Y_0 = \dfrac{x_0}{p}X_0 - \dfrac{x_0^2}{2p} \\ \overrightarrow{Ff_0} \perp \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}(x_0) : X_0.1 + (Y_0 - \dfrac{p}{2})(\dfrac{x_0}{p}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x_0}{p}X_0 + Y_0 = -\dfrac{x_0^2}{2p} \\ X_0 + \dfrac{x_0}{p}Y_0 = \dfrac{x_à}{2} \end{cases}$

   le système est de Cramer (déterminant $-1 - \dfrac{x_à^2}{p^2} \neq 0$) de solution $X_0 = \dfrac{x_0}{2}, Y_0 = 0$ .On vérifie bien

$$\boxed{f_0 \in x'Ox = d}$$

   (d) par la géométrie : Ff_0 et FH_0 sont deux droites passant par F et orthogonales à la tangente : c'est donc la même droite..f_0 est donc l'intersection de la tangente et de FH_0 . c'est donc le pied de la hauteur du triangle H_0M_0F . C'est donc le milieu du coté H_0F (triangle isocèle) donc $y_{f_0} = \dfrac{x_F + x_{H_0}}{2} = 0$

5. figure II.3

   (a) On connaît déjà $A\begin{pmatrix} a \\ \dfrac{a^2}{2p} \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} b \\ \dfrac{b^2}{2p} \end{pmatrix}$. Q est l'intersection des deux tangentes ; donc si on pose $Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on doit résoudre

$$\begin{cases} y - \dfrac{a}{p}x = -\dfrac{a^2}{2p} \\ y - \dfrac{b}{p}x = -\dfrac{b^2}{2p} \end{cases}$$

le déterminant du système est $\dfrac{a-b}{p} \neq 0$ (car $a<b$) donc :

$$x = \frac{p\begin{vmatrix} 1 & -a^2/2p \\ 1 & -b^2/2p \end{vmatrix}}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{2(a-b)} = \frac{a+b}{2}\ , y = \frac{p\begin{vmatrix} -a^2/2p & -a/p \\ -b^2/2p & -b/p \end{vmatrix}}{a-b} = \frac{ab}{2p}$$

$$\boxed{Q\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{ab}{2p} \end{pmatrix}}$$

(b) Le milieu ne pose pas de problème $I\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a^2+b^2}{4p} \end{pmatrix}$. La droite IQ est donc la droite d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$ donc

$$E\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{(a+b)^2}{8p} \end{pmatrix}$$

On vérifie : $x_E = \dfrac{x_Q + x_I}{2}$ (évident) $y_E = \dfrac{y_Q + y_I}{2}$: E est le milieu de $[IQ]$

(c) la tangente en E à la parabole est dirigée par $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{a+b}{2p} \end{pmatrix}$. la droite AB est dirigée par $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-a \\ \dfrac{b^2-a^2}{2p} \end{pmatrix}$. On vérifie que $\det\left\{\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}, \overrightarrow{AB}\right\} = 0$.

$$\boxed{\text{la tangente en } E \text{ est parallèle à } AB}$$

(d) On peut calculer les vecteurs $\overrightarrow{\alpha\beta}$ et $\overrightarrow{\alpha E}$ et vérifier $\det(\overrightarrow{\alpha\beta}\ ,\ \overrightarrow{\alpha E}) = 0$ et $\det\left(\overrightarrow{\alpha\beta}, \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right) = 0$, ce qui prouve que α, β et E sont alignés puis que cette droite est parallèle à la tangente en E donc confondue avec cette tangente (les deux droites passent par E)

Une homothétie évite le calcul : si on prend l'homothétie de centre Q et de rapport $1/2$, l'image de A est α , celle de B est β (définition des deux points) est celle de I est E (question (b)).

α, E, β sont alignés sur l'image par l'homothétie de la droite AIB . $\alpha E\beta$ est donc une droite passant par E parallèle à AB ... tout comme la tangente .La droite est confondue avec la tangente.

$$\boxed{\alpha\beta \text{ est tangente en } E \text{ à } P}$$

6.

(a) Les deux tangentes sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ a/p \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ b/p \end{pmatrix}$ le sont. La condition est donc $ab = -p^2$. Ce qui impose $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

(b) Le point Q a alors les coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a^2-p^2}{2a} \\ \dfrac{ab}{p} = -\dfrac{p}{2} \end{pmatrix}$. Le point Q est sur la directrice D de la parabole.

Réciproquement soit $Q_0\begin{pmatrix} x_0 \\ -p/2 \end{pmatrix} \in D$. On doit avoir $\dfrac{a^2-p^2}{2a} = x_0$ donc a doit être racine de l'équation $a^2 - 2x_0 a - p^2 = 0$. Le coefficient de a^2 étant non nul , c'est une équation du second degré . Or $\Delta = 4x_0^2 + 4p^2 > 0$ (car $p>0$) . L'équation admet toujours 2 racines distinctes . Soit a et b ces racines . Le produit des racines vaut alors $-p^2$ (relation entre coefficient et racine d'une équation du second degré).

Par Q il passe donc deux tangentes : celles aux points d'abscisse a et b de la parabole . et comme $ab = -p^2$ on a : $\left\langle \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}(a), t\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dx}(b) \right\rangle = 0$ et les tangentes sont orthogonales.

$$\boxed{\text{L'ensemble des points du plan par le quel il passe deux tangentes orthogonales à } P \text{ est la droite } D}$$

(c) On a $I\left(\begin{array}{c}\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a^2-p^2}{2a}\\ \dfrac{a^2+b^2}{4p}=\dfrac{a^4+p^4}{4pa^2}\end{array}\right)$. On remarque que si $a->-a$ on a une symétrie par rapport à Oy . Donc si la parabole existe son axe est Oy donc son équation est du type $y=\alpha x^2+\beta$.

or $x^2=\dfrac{a^4+p^4-2a^2p^2}{4a^2}=\dfrac{a^4+p^4}{4a^2}-\dfrac{p^2}{2}=py-\dfrac{p^2}{2}$. $\boxed{y=\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{p}{2}}$

Réciproquement si $I_0\left(\begin{array}{c}x_0\\ \dfrac{x_à^2}{p}+\dfrac{p}{2}\end{array}\right)$ est un point de la parabole l'équation $\dfrac{a^2-p^2}{2a}=x_0$ admet toujours 2 racines distincts a et b tels que $ab=-p^2$ (sous question précédente).

On doit alors vérifier que $\dfrac{a^2+b^2}{4p}=\dfrac{x_0^2}{p}+\dfrac{p}{2}$. Or $\dfrac{a^2+b^2}{4p}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{4p}=\dfrac{(2x_0)^2-(-2p^2)}{4p}$ d'après la relation entre coefficients et racines de l'équation $a^2-2x_0a-p^2=0$.

On a donc bien $\dfrac{a^2+b^2}{4p}=\dfrac{x_à^2}{p}+\dfrac{p}{2}$

$\boxed{\text{l'ensemble des milieux des cordes } [AB] \text{ telles que les tangentes en A et B soient orthogonales est une parabole}}$