

SUITES REELLES ET COMPLEXES

Ce polycopié reprend des résultats du cours de Sup sauf la formule de Stirling (cf 6.5)

La notation \mathbb{K} désigne le corps des réels (\mathbb{R}) ou celui des complexes (\mathbb{C})

1. VOCABULAIRE SUR LES SUITES:

1.1. définition

On appelle suite de \mathbb{K} toute application de D dans \mathbb{K} , D étant un sous ensemble de \mathbb{N} vérifiant

$$\exists n_0 \ n \geq n_0 \Rightarrow n \in D$$

une suite définie sur D est notée $(u_n)_{n \in D}$.

structure: L'ensemble des suites définies sur D à valeurs dans \mathbb{K} est une \mathbb{K} -algèbre.

1.2. translation

si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite on peut définir la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+n_0}$. Grâce à cette translation des indices on peut toujours supposer une suite définie sur \mathbb{N} . C'est ce qui est fait dans toute la suite. En pratique on rencontrera souvent des suites définies sur \mathbb{N}^* ou autre domaine.

1.3. vocabulaire

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \ u_n = u_m) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n)$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire $\Leftrightarrow (\exists n_0 \ ([n \geq n_0 \ m \geq n_0] \Rightarrow u_n = u_m)) \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0 \ u_{n+1} = u_n)$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leq M$. L'ensemble des suites bornées sur \mathbb{K} est une \mathbb{K} algèbre.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période $T > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$

Il existe alors une plus petite période strictement positive : la période de la suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si

$$\exists l \in \mathbb{K} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ , \ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

l est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (article définie car il y a unicité). On dit encore que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l

notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$, $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

Rq : on a une définition équivalente en remplaçant \geq par $>$ ou \leq par $<$

- une suite qui ne converge pas diverge (elle peut tendre vers l'infini, ou ne pas avoir de limite)

2. SUITES RECURRENTES :

2.1. suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$

on a alors $u_n = u_0 + na$

2.2. "série arithmétique" $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{i=0}^n u_i$, u_i étant une suite arithmétique

on, a alors : $v_n = (n+1)u_0 + a \frac{n(n+1)}{2}$

dans le même ordre d'idées il est bon de connaître les sommes:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

2.3. suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$

on a alors $u_n = u_0 a^n$

Cette suite converge vers 0 si $|a| < 1$, vers u_0 si $a = 1$, elle diverge dans tous les autres cas.

2.4. "série géométrique" : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{i=0}^n u_i$, u_i étant une suite géométrique

on a alors $v_n = u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$ $v_n = (n+1)u_0$ si $a = 1$

2.5. suite arithmético géométrique $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$

- si $a = 1$ pas de problème
- si $a \neq 1$ on prend l racine de $l = al + b$ et alors $v_n = u_n - l$ qui est géométrique

2.6. suite homographique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$

- si $c = 0$ pas de problème
- si $c \neq 0$ on résout $l = \frac{al+b}{cl+d}$ qui se ramène à une équation du second degré.
 - s'il existe une racine double l alors $v_n = \frac{1}{u_n-l}$ est arithmétique
 - s'il existe deux racines distinctes l_1 et l_2 (réelles ou non) alors $v_n = \frac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$ est géométrique.

2.7. suite récurrente linéaire double : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ($b \neq 0$)

On cherche les solutions géométriques k^n ($k \in \mathbb{C}^*$). D'où l'équation caractéristique $k^2 = ak + b$

- S'il existe deux racines distinctes $u_n = \alpha k_1^n + \beta k_2^n$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2$)
- S'il existe une racine double $u_n = (\alpha + \beta n)k^n$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2$)
- On utilise les conditions initiales pour calculer (α, β)

3. SUITES CONVERGENTES ET LIMITE DANS \mathbb{K}

3.1. Premières propriétés

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l toute suite obtenue par translation $v_n = u_{n+n_0}$ converge aussi vers l .

3.2. structure

- L'ensemble des suites convergentes est une algèbre sur \mathbb{K} et la limite est un morphisme d'algèbre
- En particulier : toute combinaison linéaire de suites convergentes converge, et la limite est la combinaison linéaire des limites.
- L'ensemble des suites de limite nulle est une algèbre sur \mathbb{K}
- Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

3.3. inverse

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend pas la valeur 0 et si la suite converge vers une limite non nulle l alors: $(1/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/u_n) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)}$.

3.4. module (valeur absolue)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = |\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)|$

3.5. réel et complexe

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{C} . la suite converge si et seulement si ses parties réelles et imaginaires convergent et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Re(u_n)) + i \lim_{n \rightarrow +\infty} (Im(u_n))$$

Si le module et un argument de la suite convergent alors la suite converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) e^{i \lim_{n \rightarrow +\infty} (arg(u_n))}$$

la réciproque est fautive pour l'argument.

3.6. conjugué

Si une suite complexe converge la suite des conjugués converge vers le conjugué de la limite.

4. SUITES CONVERGENTES ET LIMITE DANS \mathbb{R} :

Dans \mathbb{R} on dispose également d'une relation d'ordre qui permet de compléter les résultats précédents.

4.1. vocabulaire

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante $\Leftrightarrow (\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \ n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n)$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow (\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \ n > m \Rightarrow u_n > u_m) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} > u_n)$
- on définit de même décroissante et strictement décroissante.

Pour montrer qu'une suite est croissante on peut :

- calculer $u_{n+1} - u_n$ et déterminer le signe de cette expression
- procéder par récurrence (l'exemple classique est le cas des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante)
- pour une suite de réels strictement positifs montrer $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

4.2. inégalité et limite

- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes vérifiant $(\exists n_0 \ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq v_n)$ alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$$

- Le résultat ne passe pas aux inégalités strictes.
- Toute suite convergente vers un réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel α strictement positif.

4.3. Théorème de majoration

Soient deux suites telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \end{cases}$$

alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

4.4. Théorème d'encadrement

Soient trois suites tels que: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite } l \end{cases}$

alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

4.5. maximum (et minimum)

si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n, w_n = \max(u_n, v_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\max(u_n, v_n)) = \max(\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n))$

Par récurrence le résultat reste vrai pour un nombre fini de suites convergentes mais devient faux pour un nombre infini de suites.

4.6. suite monotone

Toute suite de \mathbb{R} croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge et sa limite est sa borne supérieure (respectivement inférieure).

Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$

4.7. Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de \mathbb{R} vérifiant: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante, } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ (v_n - u_n) \text{ tend vers zéro} \end{cases}$

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

théorème des segments emboîtés:: Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de segments de \mathbb{R} tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, alors l'intersection des I_n est un singleton.

4.8. continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 .

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ de limite x la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$.

5. LIMITES INFINIES

5.1. définition générale

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{K} $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini si et seulement si:

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists N_A \forall n \in \mathbb{N} n \geq N_A \Rightarrow |u_n| \geq A$$

5.2. cas de \mathbb{R}

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists N_A, \forall n \in \mathbb{N} n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A \text{ (resp } u_n \leq A)$$

On notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Mais attention malgré l'emploi de "lim" la suite diverge.

En pratique on peut se limiter à l'étude du cas $A > 0$ ($A < 0$)

5.3. règles de calculs

5.3.1. opposé:

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$

5.3.2. somme et produit dans les réels

+	$\lim(u_n)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(v_n)$				
$l' \in \mathbb{R}$		$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$???
$-\infty$		$-\infty$???	$-\infty$

*	$\lim(u_n)$	$l \in \mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$	0
$\lim(v_n)$				
$l' \in \mathbb{R}^{+*}$		$l.l'$	$+\infty$	0
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$???
0		0	???	0

dans \mathbb{C} si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini .

5.3.3. inverse

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{C} qui ne prend pas la valeur 0 alors: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini si et seulement si $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

5.3.4. minoration

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de \mathbb{R} . si $(\forall n \geq N u_n \geq v_n)$ et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors u_n diverge vers $+\infty$.

6. COMPARAISON

Dans cette partie toutes les suites sont à valeurs réelles.

6.1. vocabulaire

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est infinitement petite devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($u_n \ll v_n$ ou $u_n = o(v_n)$) si et seulement si:

$$\exists N \in \mathbb{N} (\forall n \geq N, |u_n| = v_n \varepsilon_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0)$$

On dit encore que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant (v_n) .

- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est infinitement grande devant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si $v_n \gg u_n \Leftrightarrow u_n \ll v_n$
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ domine $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($u_n = \mathcal{O}(v_n)$):

$\exists N \in \mathbb{N} (\forall n \geq N, u_n = v_n \varepsilon_n \text{ et } (\varepsilon_n)_{n \geq N} \text{ étant bornée})$

(Rq 5/2) Ne pas confondre avec la convergence dominée des suite de fonctions :

$\forall x \in I, |u_n(x)| \leq \phi(x)$, ϕ étant indépendante de n

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes ($u_n \sim v_n$) si et seulement si:

$\exists N \in \mathbb{N} (\forall n \geq N, u_n = v_n \varepsilon_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 1)$

critère: si les (v_n) est à valeurs dans \mathbb{R}^+ : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \ll v_n$

6.2. remarques

Si $u_n \sim v_n$ ou $u_n \ll v_n$ alors pour n supérieur à N u_n est nul si v_n est nul.

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est toujours non nul il suffit d'étudier le quotient $\frac{u_n}{v_n}$

Aucune suite ne peut être équivalente à zéro excepté les suites stationnaires nulles à partir d'un certain rang.

6.3. infiniment petit (grand)

• (u_n) est infiniment petite: $u_n \ll 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$

• (u_n) est infiniment grand: $u_n \gg 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = +\infty$

6.4. infiniment petit principale , infiniment grand principal

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0. On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un infiniment petit principal de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si:

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est "simple" :(puissance, logarithme ...) et $u_n \sim v_n$

6.5. formules usuelle:

• $n^a \ll n^b$ si $a < b$

• $x^n \ll y^n$ si $0 < x < y$

• $(\ln(n))^\alpha \ll n^\beta \ll a^n \ll n!$ si $\alpha > 0 \beta > 0 a > 1$

• si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite l non nulle $u_n \sim l$.

• si $u_n = f(x_n)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de limite nulle et si $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$ alors $u_n \sim x_n f'(0)$

• Ce qui se généralise avec le premier terme non nul du développement limité de f s'il existe.

• formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (formule que vous n'avez peut-être pas vue en Sup et qui est admise)

6.6. propriétés des équivalents

• Sur les suites à valeurs dans \mathbb{C} l'équivalence est une relation d'équivalence.

• Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites équivalentes et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l (fini ou infini) alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers l .

• produit: $(u_n \sim v_n \text{ et } u'_n \sim v'_n) \Rightarrow (u_n u'_n) \sim (v_n v'_n)$

• $(u_n \sim v_n \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (u_n^\alpha \sim v_n^\alpha)$ (si les puissances sont définies)(résultat faux si α n'est pas une constante)

• somme = DANGER

La seule règle sans danger est: $(u_n \sim \alpha v_n \text{ et } u'_n \sim \beta v_n)$ alors $\begin{cases} \text{si } \alpha + \beta \neq 0 \text{ alors } u_n + u'_n \sim (\alpha + \beta)v_n \\ \text{si } \alpha + \beta = 0 \text{ alors } u_n + u'_n \ll v_n \end{cases}$

6.7. suite dominée

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de \mathbb{R}^{+*} tels que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ domine $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7. SUITES EXTRAITES

(ou sous suite)

7.1. définition

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{K} On appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(v_n) = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, ϕ étant une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

7.2. convergence

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

en pratique

On utilise la contraposée pour prouver la divergence:

- Si on trouve une suite extraite qui diverge la suite diverge
- Si on trouve deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes la suite diverge.

On utilise aussi les suites d'indices pairs et impairs:

- Théorème: si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

8. PRATIQUE DE L'ETUDE D'UNE SUITE REELLE:

Vous trouverez ci dessous les principales méthodes pratiques pour étudier les problèmes de convergence et de limite d'une suite.

Dans un exercice ou un problème il est souvent demandé d'étudier la convergence et/ou de calculer la limite d'une suite de réels ou de complexes (5/2 d'étudier la convergence simple et/ou de calculer la limite d'une suite de fonctions).

N'oubliez pas de vous posez d'abord la question du domaine de définition de la suite.

(5/2) Profitez de l'occasion pour revoir une première fois les méthodes spécifiques aux suites d'intégrales.

8.1. Bien réfléchir à la question :

- faut-il seulement prouver la convergence (ou la divergence de la suite)
- faut-il calculer la limite d'une suite que l'on sait être convergente
- faut-il prouver la convergence vers un α déjà connu (α est dans le sujet de la question, α est devinable d'après les questions qui précèdent ou qui suivent, α est devinable à la machine). Dans ce cas il est souvent plus facile de prouver que $u_n - \alpha$ tend vers 0.
- faut-il prouver qu'une suite diverge et admet une limite $+\infty$ ou $-\infty$
- faut-il prouver qu'une suite converge et calculer sa limite

8.2. Bien rédiger la solution

- il est toujours possible de rouler un examinateur en rédigeant mal et approximativement, mais c'est très rare.
- il vaut toujours mieux être précis sur ce que vous avez fait et ne pas hésiter à rédiger dans une copie :
"je n'ai pas su prouver que la suite converge mais si elle converge alors voici ma démonstration pour le calcul de la limite :"
"je n'ai pas su calculer la limite de la suite mais avec ma machine à calculer j'ai trouvé ..."
- citez clairement l'énoncé du théorème utilisé.

8.3. Essais préliminaires

- si la suite ne dépend d'aucune variable et d'aucun paramètre il est en général facile de calculer une valeur approchée des premiers termes (à la machine si elle est autorisée, sinon à la main) de façon à faire des conjectures sur la suite (sens de variation, ordre de grandeur de la limite ...)
- si la suite dépend d'une variable ou d'un paramètre, lui donner quelques valeurs simples et reprendre le point précédent.

8.4. Prouver une convergence:

En général si le sujet demande uniquement de montrer qu'une suite converge il ne faut surtout pas chercher à calculer la limite.

Les méthodes de bases sont :

- suite croissante majorée (décroissante minorée)
- si vous avez deux suites étudiez si elles sont adjacentes.
- (5/2) passez aux séries : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

8.5. Prouver une divergence

N'oubliez pas qu'une suite diverge soit parce que sa limite est infinie , soit parce qu'elle n'a pas de limite:

- pour prouver une limite infinie voir plus bas
- pour prouver qu'il n'existe pas de limite finie ou infinie :
 - trouver deux suites extraites ayant des limites différentes :
 - trouver une suite extraite divergente de façon évidente (rare)
 - travailler par l'absurde : si la suite converge soit l sa limite

8.6. Calculer une limite finie sachant la convergence

- utiliser l'image d'une suite convergente par une fonction continue

8.7. Calculer une limite infinie

- utiliser les règles de calculs sur les sommes, produits, inverses, composés de suites.
- pour prouver $\lim(u_n) = +\infty$ on peut chercher une suite minorante v_n de limite $+\infty$
- utiliser les théorèmes sur les équivalents pour trouver un équivalent de limite infinie
- utiliser un développement limité pour trouver l'équivalent
- si la suite est croissante non majorée ...
- si la suite est croissante et qu'elle n'a pas de limite finie ...

8.8. Prouver une convergence et calculer la limite.

Vous ne savez que la suite converge . Il est donc interdit de commencer l'étude (et donc la rédaction) en parlant de $\lim(u_n)$

N'oubliez pas qu'il est parfois plus simple de casser la question en deux (C'est par exemple le cas avec une suite monotone):

a) je prouve la convergence

b) la suite converge donc je calcule la limite

- utiliser les règles de calculs sur les sommes, produits, inverses, composés de suites.
- utiliser les théorèmes sur les équivalents pour trouver un équivalent de limite finie
- utiliser un développement limité pour trouver l'équivalent
- utiliser un encadrement entre deux suites convergentes de même limite
- cas particulier : pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro , majorer $|u_n|$ par une suite v_n plus simple de limite nulle.
- revenir à la définition et aux quantificateurs.

8.9. exemple classique : suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Idées principales de l'étude:

On se place toujours sur un intervalle fermé (borné ou non) I stable par f et contenant u_0 . On a alors

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
- si f est continue sur I et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l alors $l \in I$ et $f(l) = l$. L'idéal est alors de se placer sur un intervalle I stable contenant une seule racine.
- si f est croissante sur I alors la suite est monotone. On peut alors dire :
 - si la suite est croissante majorée (décroissante minorée) alors elle converge
 - si la suite est croissante et s'il n'existe pas de limite possible $l \geq u_0$ alors elle diverge vers $+\infty$.
- si f est décroissante sur I alors $f \circ f$ est croissante et les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones
- si f est C^1 sur I stable et si $|f'|$ est majorée par K , alors si $f(l) = l$, $|u_{n+1} - l| \leq K |u_n - l|$ (inégalité des accroissements finis) et donc $|u_n - l| \leq K^n |u_0 - l|$. En particulier si $K < 1$ la suite converge vers l .