Feuille d'exercices numéro 3 (séries numériques)

1. réflexion sur le cours:

1.

   1. Etudier la convergence simple et absolue des séries $\sum \frac{1}{n^a}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ et $\sum \frac{i^n}{n^a}$, en discutant selon la valeur de $a > 0$
   2. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{C}$ et $v_n = u_n^2$

   - montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument , la série $\sum v_n$ converge absolument
   -
     - donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ converge non absolument et $\sum v_n$ converge absolument
     - donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ converge non absolument et $\sum v_n$ converge non absolument
     - donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ converge non absolument et $\sum v_n$ diverge
     - donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge absoluement
     - donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge non absoluement
     - donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ diverge et$\sum v_n$ diverge et $\lim(u_n) = 0$

2. Convergence et somme des séries :

   1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9n^2+15n+4}$. On décomposera $\frac{1}{9n^2+15n+4} = \frac{a}{3n-1} + \frac{b}{3n-4}$
   2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$. On linéarisera le logarithme
   3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$. on décomposera $\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$
   4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$: On utilisera : $\frac{1}{p+1} = \int_0^1 t^p dt$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

3. Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ avec : :

   a) $u_n = (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ b) $\tan(\pi/4 + 1/n)$ c) $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ d) $\frac{(-1)^n \ln(n/2)}{n}$ e) $u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$.

   f) $\frac{2^n}{1+3^n}$ $g)\frac{(1/2)^n}{1+(1/3)^n}$ h) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ i) $\frac{\cos(n)}{n^2}$ j) $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$. k) $(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (faire un DL)

   l) $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n(n+1)})}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})}$. m) $\sqrt{1+n^2} - \sqrt[3]{1+n^3}$ n) $\arctan(n+1) - \arctan(n)$ (utiliser les acroissement finis)

4. Encadrer $\frac{1}{\sqrt{n}}$ entre $\int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

   Calculer de même un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1^+$.Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Montrer que la suite (b_n) converge (indication : étudier la série $b_{n+1} - b_n$).En déduire :

$$\exists \lambda > 0, u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$$

2. exercices

1. Convergence et somme des séries :

   1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-10}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$, On décomposera $\frac{n^2-10}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} + \frac{d}{n+3}$
   2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(E\left(\sqrt{n+1}\right) - E\left(\sqrt{n}\right)\right)$. On remarquera que en général $E\left(\sqrt{n+1}\right) - E\left(\sqrt{n}\right) = 0$ pour ne garder que les autres termes
   3. $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \sin^3(x/3^n)$, On montrera : $3^n \sin^3(x/3^n) = \frac{3^{n+1}\sin(x/3^n) - 3^{,n}\sin(x/3^{n-1})}{4}$
   4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

2. Soit $u_n = \arctan(\frac{1}{2n^2})$

   Montrer que $u_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(\frac{n-1}{n})$

   Nature et somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

3. nature de la série $\sum\left(e^{1/n} + ae^{1/(n+1)} + be^{1/(n+2)}\right)$, si la série converge , calcul de $\sum_1^{+\infty}\left(e^{1/n} + ae^{1/(n+1)} + be^{1/(n+2)}\right)$

4. Soit x réel.

   1. calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{n!}$ puis $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n-1)x^n}{n!}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^2x^n}{n!}$
   2. généralisation : : on considère la suite de polynômes :

   $$Q_0 = 1, Q_1 = X, Q_2 = X(X-1)...\forall k \geq 1 \; Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

      - Montrer que $\{Q_k\}_{k=0}^{p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$
      - Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q_k(n)x^n}{n!}$
      - Montrer que si P est un polynôme alors il existe un polynôme Q tel que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(n)x^n}{n!} = Q(x)e^x$.
   3. généralisation 5/2 : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ (avec $R > 0$)
      Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k(n) a_n x^n$
      On peut donc calculer , pour tout polynôme P , $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) a_n x^n$ en fonction de f et de ses dérivées.

5. On sait et on utilisera que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
   Soit la suite $u_0 = e - 1$, $\forall n > 0$, $u_n = nu_{n-1} - 1.\forall n > 0$,
   Montrer que pour tout n : $u_n = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. En déduire $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$
   quelle est la limite de la suite u_n.
   calculer avec votre machine les termes de la suite $u_0 = 1.718281828$ $(= e \pm 10^{-9})$, $u_n = nu_{n-1} - 1$. .Expliquez le résultat

6. nature des séries de terme général :
   a) $\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}$ b) $\frac{sh(n)}{n^\alpha}$ c)$\frac{(3n)!}{n!(2n)!}$ d) $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ e)$\frac{1}{n^{1+1/n}}$ f) $\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt[4]{n^4-1}$

7. Chercher les réels a, b, c pour que la série de terme général :

   $$u_n = (n^3 + an^2 + bn + c)^{1/3} - n$$

   soit convergente

8. Soit $f \in C^0([0,a], \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in [0,a]$, $0 < f(x) < 1$
   Etude de la suite récurrente: $u_{n+1} = u_n f(u_n)$, $u_0 \in [0,a]$
   Nature de la série $\sum u_n$

9. Etudiez par développement limité la convergence des séries
   a) $\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n}$ ($\alpha > 0$) b) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ c) $\exp(\frac{(-1)^n}{n}) - 1$ d) $\ln(n)\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ e) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}}$

10. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

    1. Déterminer un équivalent de $u_n - u_{n-1}$.Que peut-on en déduire pour la série $\sum (u_n - u_{n-1})$
    2. Montrer $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$
    3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs tels que $a_n \sim b_n$ et $\sum a_n$ converge .Montrer que :

    $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$$

       on montrera : $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, $(n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)a_n \leq b_n \leq (1+\varepsilon)a_n)$
    4. Montrer $u_n - u_{n-1} \sim_{+\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)}$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})$.
    5. Montrer $S_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

11. Soit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs et pour tout n $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.
    Comparer la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$