Concours commun polytechnique filière PC 2004 Math 2

parties 1 et 2

PARTIE I

1. Soit $u_n(z) = |n^{-s}z^n| = n^{-s}|z|^n$.

   - si $|z| > 1$ on a $\lim_{n->+\infty}(|u_n(z)|) = +\infty$ car la suite géométrique $|z|^n$ l'emporte sur la puissance n^{-s} quand le produit est indéterminé. On a donc divergence grossière.
   - si $|z| < 1$ on a $\lim_{n->+\infty}\left(n^2|u_n(z)|\right) = 0$ car la suite géométrique $|z|^n$ l'emporte sur la puissance n^{2-s} quand le produit est indéterminé. La série converge absolument , donc converge

2. Etude si $|z| = 1$

   1.
      - si $s > 1$ on a $\sum|n^{-s}z^n| = \sum\frac{1}{n^s}$ série convergente d'après le critère des séries de Riemann donc comme la convergence absolue implique la convergence :

        $$\boxed{(s > 1, |z| = 1) \Longrightarrow \sum|n^{-s}z^n|\ CV}$$

      - si $s \leq 0$ $|n^{-s}z^n| = n^{-s} \geq 1$. La série diverge grossièrement :

        $$\boxed{(s < 0, |z| = 1) \Longrightarrow \sum|n^{-s}z^n|\ DV}$$

   2. si $z = 1$ $\sum n^{-s}z^n = \sum\frac{1}{n^s}$ est une série de Riemann donc diverge si $s \in]0, 1]$
   3.
      - (S_n) est la somme partielle d'une série géométrique (divergente car $|z| = 1$) et donc :

        $$S_n = z\frac{1 - z^n}{1 - z}$$

        donc

        $$|S_n| = \left|z\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

        or $|1 - z|^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 2(1 - \cos\theta) = 4(\sin(\theta/2))^2$ On a donc bien

        $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, |S_n| \leq \frac{1}{|si,n(\theta/2)|}}$$

      - On écrit $z^k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$: vrai si $k = 1$ car $S_1 = z$ et $S_0 = 0$; vrai si $k > 1$ par simplification de Σ ; faux si $n = 0$ car S_{-1} n'existe pas

        erreur de texte sans conséquence pour la suite car S_0 ne sert à rien

        D'où

        $$\sum_{k=1}^{n}k^{-s}z^k = \sum_{k=1}^{n}k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n}k^{-s}S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n}k^{-s}S_k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-s}S_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)S_k + S_n n^{-s} \text{ (car } S_0 = 0 \text{)}$$

      - On a $\left|\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)S_k\right| = \left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)|S_k|$ car $s \in]0, 1]$ donc $\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right) > 0$ et donc

        $$\left|\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)S_k\right| \leq M(\theta)\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)$$

        Or la série $\sum\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)$ converge car la suite (k^{-s}) converge :

        Donc par majoration $\sum\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)S_k$ est une série qui converge absolument . Soit Σ sa somme . 0n a alors comme la suite $(S_n n^{-s})$ converge vers 0 (produit d'une quantité bornée par une quantité qui tend vers 0)

        $$\lim_{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{-s}z^k\right) = \Sigma + 0$$

        et donc

        $$\boxed{\sum n^{-s}z^n \text{ converge si } s \in]0, 1], |z| = 1, z \neq 1}$$

        remarque : l'hypothèse $s > 0$ sert plusieurs fois mais pas l'hypothèse $s \leq 1$. ce n'est pas un problème car il n'y a pas contradiction avec la CVA dans ce cas.

Synthèse : La série $\sum n^{-s}z^n$ converge si et seulement ($s>1$, et $|z|\leq 1$) ou si ($s\in]0,1], |z|=1, z\neq 1$) .

C'est à dire que la série entière de rayon de convergence 1 converge en tout point du bord du disque de convergence sauf en $z=1$

3.

- méthode 1 : intégration d'une série entière :

  l'intégrale existe car : si on pose $f_s(t)=\begin{cases}\phi(t,s) \text{ si } t>0\\ 1 \text{ si } t=0\end{cases}$. f_s est continue sur $]0,x]$ car ϕ est continue sur $[0,x]$ ou $[-x,0]$ (série entière sur l'intervalle ouvert de convergence) et $\lim_0\left(\frac{\phi(t,s)}{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\phi(t,s)\right)_{t=0}=1$ (coefficient de t dans le DSE) , donc la fonction $\int_0^x f_s(t)dt$ existe .

  De plus $\phi(t,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}t^n$ est une série entière (en t) de rayon de convergence 1 . Donc $f_s(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}t^{(n-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^{-s}t^n$ est aussi une série entière de rayon de convergence 1 . On peut prendre la primitive d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence donc :

$$\int_0^x f_s(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^{-s}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^{-(s+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}x^n=\phi(x,s+1)$$

- méthode 2 : intégration termes à termes d'une série :

  Soit $f_n(t)=n^{-s}t^{(n-1)}$, on a : $\begin{cases}\text{La série } \sum f_n(t) \text{ converge simplement sur }]0,x] \text{ (ou } [-x,0[\text{)}\\ \forall n\in\mathbb{N}^* \text{ , } f_n(t) \text{ est continue sur } [0,1x \text{ donc intégrable sur }]0,x]\\ t->\sum_1^{+\infty}f_n(t)=\frac{\phi(s,t)}{t} \text{ est continue sur }]0,x] \text{ car une série entière est continue sur le disque}\\ \text{si } x>0: \sum\int_{]0,x]}|f_n(t)|\,dt=\sum n^{-(s+1)}x^n \text{ série convergente car } |x|<1 \text{ cf } I.1\\ \text{si } x>0: \sum\int_{[x,0[}|f_n(t)|\,dt=\sum n^{-(s+1)}|x|^n \text{ série convergente car } |x|<1 \text{ cf } I.1\end{cases}$

  On peut donc intégrer termes à termes la série de fonction et

$$\int_0^x\frac{\phi(t,s)}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}t^{(n-1)}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}\int_0^x t^{(n-1)}dt=n^{-(s+1)}x^n=\phi(s+1,x)$$

- $$\boxed{\int_0^x\frac{\phi(t,s)}{t}dt=\phi(s+1,x)}$$

- On a $\phi(x,0)=\sum 0=0$ et $\phi(x,1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

4. On retrouve la fonction Γ d'Euler

   1.
      - pour $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim_{+\infty}\left(t^2f_n(t)\right)=0$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$
      - de plus on peut faire le changement de variable C^1 bijectif $u=nt$:

$$\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt=\int_0^{+\infty}e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{s-1}\frac{du}{n}=\frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\frac{\Gamma(s)}{n^s}}$$

   2. Soit $g_n(t)=z^nf_n(t)=z^ne^{-nt}t^{s-1}$ on a (attention au problème en 0 si $z=1$) :

      - $\begin{cases}\text{La série } \sum g_n(t) \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[\text{ : on a convergence absolue car } n^2|g_n(t)| \text{ tend vers 0}\\ \forall n\in\mathbb{N}^* \text{ , } g_n(t) \text{ est continue intégrable sur }]0,+\infty[\text{ d'après le point précédent}\\ t->\sum_1^{+\infty}g_n(t)=\frac{ze^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}} \text{ est continue sur }]0,+\infty[\text{ le dénominateur étant non nul car } |z|\leq 1 \text{ et } |e^{-t}|<1\\ \int_{]0,+\infty[}|g_n(t)|\,dt=|z^n|\int_0^{+\infty}f_n(t)dt\leq\int_0^{+\infty}f_n(t)dt \text{ terme général d'une série convergente d'après le point précédent}\end{cases}$

      On peut donc intégrer termes à termes la série sur $]0,+\infty[$:

$$t->\frac{ze^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \int_0^{+\infty}\sum_1^{+\infty}z^ne^{-nt}t^{s-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}z^ne^{-nt}t^{s-1}dt$$

      on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{ze^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}}dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}z^ne^{-nt}t^{s-1}dt\\ \int_0^{+\infty}\frac{zt^{s-1}}{e^t-z}dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}z^n\int_0^{+\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}z^n\frac{\Gamma(s)}{n^s}=\Gamma(s)\phi(z,s)\end{aligned}$$

On divise par $\Gamma(s) > 0$ comme intégrale d'une fonction continue strictement positive :

$$\boxed{\phi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt}$$

PARTIE II

1. Soit $u_n(s) = n^{-s}$. On doit prouver que la série $\sum u_n(s)$ est C^∞ sur $]1,+\infty[$. Les fonctions u_n sont C^∞ sur $]1,+\infty[$ et par récurrence $u_n^{(k)}(s) = (-\ln(n))^k n^{-s}$:

   - vrai si $k = 0$
   - si $k = 1$: $u_n(s) = e^{-s\ln(n)}$ donc $u_n'(s) = -\ln(n)e^{-s\ln(n)} = -\ln(n)u_n(s)$
   - hérédité : si $u_n^{(k)}(s) = (-\ln(n))^k n^{-s}$ alors $u_n^{(k+1)}(s) = (-\ln(n))^k (n^{-s})' = (-\ln(n))^{k+1} n^{-s}$

   reste à prouver la convergence normale de $\sum u_n^{(k)}$ sur tout compact $[a,b] \subset]1,+\infty[$:

   $\forall s \in [a,b] \left|u_n^{(k)}(s)\right| \leq \ln(n)^k n^{-a} = \alpha_n : \left\{ \begin{array}{l} \text{indépendante de } s \\ \sum \alpha_n \text{ converge :} \end{array} \right.$

   pour prouver la convergence de $\sum \ln(n)^k n^{-a}$ on étudie $\lim \left\{n^\alpha \ln(n)^k n^{-a}\right\}$. On a $n^\alpha \ln(n)^k n^{-a} = \left(n^{\frac{\alpha-a}{k}} \ln(n)\right)^k$. Donc par comparaison d'une puissance et d'un logarithme la quantité tend vers 0 si $\alpha < a$. On veut aussi $\alpha > 1$. Il suffit de prendre $\alpha = \frac{a+1}{2}$ qui convient car $a > 1$.

   $$\boxed{\xi(s) \text{ est } C^\infty \text{ sur }]1,+\infty[}$$

2. Les hypothèses de la question précédente permettent de dériver termes à termes la séries :

   $$\xi' s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)n^{-s} < 0$$

   donc

   $$\boxed{.\xi \text{ décroît strictement sur }]1,+\infty[}$$

3.

   - On doit comparer -la série $\sum n^{-s}$ à une intégrale de t^{-s} : c'est une classique comparaison "série , intégrale":
     La fonction $t->t$ est continue décroissante $(s > 0)$ sur $[1,+\infty[$ on a donc l'encadrement

     $$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} t^{-s} dt \leq \frac{1}{k^s}$$

     soit en sommant :

     $$-1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_1^{n+1} t^{-s} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$

     en passant à la limite (l'intégrale admet une limite et la série converge car $s > 1$)

     $$-1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

     soit

     $$\boxed{\xi(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \xi(s)}$$

   - On a $\int_1^{+\infty} t^{-s} dt = \frac{1}{s-1}$ donc

     $$\frac{1}{s-1} \leq \xi(s) \leq \frac{s}{s-1}$$

     d'où $1 \leq (s-1)\,\xi(s) \leq s$ d'où l'équivalent :

     $$\boxed{\xi(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}}$$

   - l'équivalent précédent ne suffit pas en zéro mais $\xi(s) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s} \geq 1$; D'où

     $$\boxed{\lim_{+\infty} (\xi(s)) = 1}$$

Le troisième partie commence par l'étude de série de Fourier de $\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ pour calculer $\xi(2)$ et $\xi(4)$, puis utilise ces valeurs et les formules intégrales de la fin du I pour calculer quelques intégrales.