

SERIES DE FONCTIONS

1. OU SONT LES PROBLEMES

On a bijection entre les suites et les séries. Donc les problèmes rencontrés pour les suites de fonctions, se posent aussi pour les séries de fonctions. Il suffit de reprendre les exemples des suites de fonctions et de remplacer f_n par $\sum f_{n+1} - f_n$

- La somme d'une série de fonctions continues n'est pas toujours continue
- la somme d'une série de fonctions C^1 n'est pas toujours C^1
- Même si les fonctions et leur somme sont C^1 , la dérivée de la somme n'est pas toujours la somme des dérivées.
- La relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$ n'est pas toujours vraie

Les propriétés vraies pour la somme d'un nombre fini de fonctions se généralisent mal à la somme d'un nombre infini

2. VOCABULAIRE:

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Soit $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$ la somme partielle d'ordre n :

2.1. convergence simple:

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur un intervalle I si et seulement si la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout réel x de I .

On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

reste d'ordre n :

Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I on peut définir la série reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$. la suite (R_n) converge simplement sur I vers 0

série et suite

La convergence simple sur I de $\sum f_n$ implique la convergence simple sur I de f_n vers 0.

équivalence utile :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur un intervalle I , la suite (f_n) converge simplement sur I , si et seulement si la série $\sum f_{n+1} - f_n$ converge simplement sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (f_{n+1} - f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n) - f_0$$

2.2. Domaine de définition:

La série de fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est donc définie pour un scalaire x_0 si et seulement si : $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n(x_0) \text{ est défini} \\ \text{b) la série } \sum f_n(x_0) \text{ converge} \end{array} \right.$

Pour montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur un intervalle I , il faut montrer : $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est définie sur } I \\ \text{b) la série } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \end{array} \right.$

Le domaine de définition de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est le plus grand sous ensemble de \mathbb{R} tel que $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est définie sur ce domaine} \\ \text{b) la série } \sum f_n \text{ converge simplement sur ce domaine} \end{array} \right.$

2.3. convergence absolue:

On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur I si et seulement si la série $\sum |f_n|$ converge simplement sur I .

propriété:

la convergence absolue sur I implique la convergence simple sur I ;

2.4. Convergence normale

2.4.1. définition:

Une série est dite normalement convergente sur I si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ est bornée à partir d'un certain rang} \\ \text{la série } \sum \sup_I (|f_n|) \text{ converge.} \end{array} \right.$

2.4.2. pratique:

- pour montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur I il suffit de trouver une suite majorante $(u_n)_{n \geq n_0}$ indépendante de x telle que $\sum u_n$ converge et telle que $\forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq u_n$
- pour montrer la non convergence normale de $\sum f_n$ sur I il suffit de trouver une suite (x_n) de points de I telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge .

2.4.3. propriété

- la convergence normale sur I implique la convergence simple sur I et la convergence absolue sur I .
- si $J \subset I$, la convergence normale sur I implique la convergence normale sur J .

2.5. Convergence normale sur tout segment

2.5.1. idée de base

Si on travaille sur un intervalle quelconque , il arrive souvent que les fonctions f_n soient non bornées , ou difficiles à majorées.

Par contre sur un segment toute fonction continue est bornée . Ce qui assure l'existence de $\sup_I (|f_n|)$. Et ce qui facilite souvent le calcul ou une majoration de ce sup.

Chaque fois que possible on remplacera la convergence normale sur un intervalle I par la convergence normale sur tout segment inclus dans I :

$$\forall [a, b] \subset I , \left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ est bornée à partir d'un certain rang sur } [a, b] \\ \text{la série } \sum \sup_{[a, b]} (|f_n|) \text{ converge.} \end{array} \right.$$

La première condition sera en général une conséquence évidente de la continuité de la fonction.

pour prouver la seconde on cherchera à majorer $|f_n|$ par u_n indépendant de x (mais le majorant pouvant dépendre de a et/ou b) telle que $\sum u_n$ soit une série convergente.

2.5.2. propriétés:

- Si la série converge normalement sur tout segment inclus dans I , elle converge absolument sur I (elle converge donc aussi simplement sur I)
- Si la série converge normalement sur I elle converge normalement sur tout segment inclus dans I .
- si I est un segment la série converge normalement sur I si et seulement si elle converge normalement sur tout segment inclus dans I .

2.6. Règles de base pour majorer:

Il s'agit ici de majorer $|f_n|$ par une quantité u_n indépendante de x . La majoration ne devant pas être trop grossière car on doit choisir u_n tel que $\sum u_n$ converge.

2.6.1. pour un calcul rapide majorez sans calcul de dérivées :

- Ne manipulez que des quantités positives.
- Si vous devez majorer une somme commencer par essayer l'inégalité triangulaire puis majorer chaque morceaux (souvent en prenant la plus grande valeur)
- Si vous devez majorer un produit de quantités positives majorer chaque facteur et faites le produit des majorants.
- si vous devez majorer un quotient de fonctions positives majorer le numérateur (en prenant la plus grande valeur) et minorer le dénominateur (en prenant la plus petite valeur).

2.6.2. A défaut calculer explicitement le sup en dérivant la fonction.

Ce sera en général le cas quand les méthodes précédentes donnent un majorant v_n tel que $\sum v_n$ diverge.

3. Propriétés de la somme (admises)

3.1. Continuité

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur I et qui converge normalement sur tout segment inclus dans I alors la somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I .

3.2. limite:

Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b[$ (b réel ou $b = +\infty$), si pour tout n $f_n(x)$ admet une limite finie a_n si x tend vers b alors la série $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ admet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ comme limite si x tend vers b et :

$$\lim_{x \rightarrow b} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow b} (f_n(x)) \right)$$

3.3. Primitives

Soient $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'applications continues sur I telle que la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I et $a \in I$, alors la série des primitives $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt$ converge vers $\int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} f_n(t) dt$ sur I .

3.4. Dérivabilité (dérivation terme à terme d'une série)

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions C^1 sur I , qui converge simplement sur I et telle que $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I alors la somme de la série $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est C^1 sur I et $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$

3.5. Extension : classe C^k

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions C^k sur I , telle que :

- $\forall i < k, \sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur I
- $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment inclus dans I .

alors la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est C^k sur I et $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(i)}$ pour tout $i \leq k$.

3.6. Extension : classe C^∞

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions C^∞ sur I qui converge simplement sur I , telle que :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment inclus dans I .

alors la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est C^k sur I et $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

3.7. Intégration termes à termes

- Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'applications continues par morceaux sur un segment $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$ et si la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$ converge et $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.
- Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'applications continues par morceaux sur un segment $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ si la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et si la série $\sum \int_a^b |f_n|$ est convergente alors $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$ converge et $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.
- Dans les cas où ces théorèmes ne s'appliquent pas on pourra être conduit à utiliser le théorème de convergence dominée aux sommes partielles. (En particulier dans le cas d'une série alternée)
- (5/2) révisez et apprenez aussi les théorèmes d'intégration termes à termes d'une intégrale impropre.

3.8. applications aux suites de fonctions.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur un intervalle I vers une fonction f . Pour étudier les propriétés de f (continuité, dérivabilité ...) on utilise la relation suite \leftrightarrow série :

$$f = f_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} - f_n$$

et on étudie donc la convergence normale sur tout segment de la série $\sum (f_{n+1} - f_n)$