Feuille d'exercices numéro 5 (séries de fonctions)

1. réflexion sur le cours:

1. Etudier la convergence simple , normale :
   (faire l'étude sur $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}$, tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$)
   a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$ e)$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+n^2x^2}$
2. soit
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$
   1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique
   2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.
   1. montrer :
   $$\forall x \in [0, 1[\ : \ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n f(t)dt = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt$$
   2. Quelle somme de série en déduit-on si on prend $f(t) = 1$ dans l'égalité précédente ?
4. Soit
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$$
   1. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$
   2. calculer $\lim_{+\infty}(f)$
   3. Simplifier $f' - f$
   4. Intégrer l'équation différentielle obtenue et en déduire f .

2. exercices

1. Soit
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$$
   1. Donner le domaine de définition de f.
   2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer f' sur ce domaine.
   3. Calculer $\lim_{+\infty}(f)$
   4. En déduire le calcul de f sur $\mathbb{R}^{+*}$
   5. En utilisant $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1}dt$, exprimer $S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$ à l'aide d'une intégrale..En déduire le calcul de $f(0)$
   6. f est-elle continue en 0 ?
2. Soit
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$$
   Domaine de convergence simple. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^{+*}$, sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$? .
   Calculer la fonction f sur son domaine de définition.
3. Soit :
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$$
   1. Domaine de définition de f .
   2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
   3. Etudiez f quand x tend vers 0 .
   4. Donnez les variations de f .

5. Etudier la limite de f en $+\infty$
6. Donner avec ces informations le graphe de f .

4. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple D et le domaine de convergence absolue de cette série de fonction.
2. Montrer que sur D la série vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternés.
3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. étudier la limite de f en $+\infty$
5. Soit $x > 0$. Etudier les variations sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $t -> (xt+2)\exp(-xt) - 2$ puis celle de $t -> \frac{1-\exp(-xt)}{t^2}$
6. Montrer que f est continue en 0 .

5. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ „continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$
   On a $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$
2. calculer les primitives de $g_x : t -> \frac{1}{t(1+x^2t^2)}$.
3. Donner un encadrement de $\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ entre deux intégrales de g_x
4. Montrer $\lim_{x->0^+} \left(\frac{f(x)}{x}\right) \to_{x\to 0} +\infty$. f est-elle dérivable en 0 .

6. Soit g la fonction continue sur $[0,1]$ définie sur $[0,1[$ par $g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$. on notera $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx = \int_0^1 g(x)dx$

1. calculer $g(1)$
2. Soit pour $k \in \mathbb{N}$, g_k définie sur $[0,1]$ par $g_k(x) = x^k \sin(\pi x)$
   Montrer que sur $[0,1[$ $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k = g$. Que se passe-t-il pour $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(1)$
3. Vérifier $\forall x \in [0,1]$, $\sin(\pi x) \leq \pi(1-x)$
4. Montrer:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k \sin(\pi x) dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

   (en utilisant la même notation pour la seconde intégrale que pour la première)