

Feuille d'exercices numéro 7 (espace vectoriel normé)

1. réflexion sur le cours:

1. a et b étant des réels strictement positifs : Etudier si E est ouvert, fermé compact

- dans \mathbb{R}^2 , $E = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, xy \leq a\}$, $E = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $E = \mathbb{R}^2 - Vect(\vec{i})$, $E = \{(x, y), (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$
- dans un espace vectoriel normé de dimension finie : $E = \{v, \|v\| = a\}$, $E = \{v, a < v \leq b\}$, $E = \{v, \sin(\|v\|) = a\}$

2. Etudier si les fonctions suivantes ont des limites si (x, y) tend vers $(0, 0)$ en restant dans le domaine de définition de f .

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, f(x, y) = \frac{x+y}{|x|+|y|}, f(x, y) = \frac{x^2}{\sup(|x|, |y|)}, f(x, y) = \frac{y^2}{|x|+|y|}, f(x, y) = \frac{1}{y} \sin(x^2 y^2), f(x, y) = \frac{1}{y} \sin\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

3. (théorème du point fixe) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'une base $(e_i)_{i=1}^p$ et muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et F un fermé de E

Soit f une application de F dans F lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$

$$\exists k \in [0, 1[, \forall (x, y) \in F^2, \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq k \|x - y\|_\infty$$

On se donne enfin une suite récurrente $u_0 \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in F$
 2. Montrer $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq k \|u_n - u_{n-1}\|_\infty$
 3. Montrer $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq k^n \|u_1 - u_0\|_\infty$
 4. On étudie les coordonnées $u_{n,i}$ de u_n : $u_n = \sum_{i=0}^p u_{n,i} e_i$
montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ la suite $(u_{n,i})$ converge.
 5. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite notée l
 6. Montrer que l'équation $f(t) = t$ admet au plus une racine, puis que l est l'unique racine de cette équation
4. On utilisera la continuité du déterminant.
- Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices non inversibles.
Montrer que si la suite converge la limite est non inversible.
 - Donner un exemple de suite de matrices inversibles, convergeant vers une matrice non inversible
 - On considère les systèmes : $\forall t \in I : \begin{cases} ax + by + cz = f(t) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = g(t) \\ ux + vy + wz = h(t) \end{cases}$, $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, u, v, w)$ étant 9 scalaires (f, g, h) trois fonctions continues sur un intervalle I .
On suppose que le système est de Cramer. Montrer que la solution du système est une fonction continue sur I .
 - Soit (f, g, h) trois fonctions C^0 d'un intervalle I dans \mathbb{R}^3 . On suppose que pour tout t $(f(t), g(t), h(t))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
Montrer que s'il existe $u \in I$ tel que $(f(u), g(u), h(u))$ soit une base directe alors $\forall t \in I$ $(f(t), g(t), h(t))$ est une base directe.

2. exercices

1. Dans \mathbb{R}^2 montrer que l'image d'un fermé par une homothétie de centre Ω et de rapport non nul est un fermé

Même question pour une rotation, une translation, une isométrie.

Montrer que les résultats précédents restent vrai pour les compacts de \mathbb{R}^2 .

Montrer que les résultats précédents restent vrai pour les ouverts de \mathbb{R}^2 .

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie

1. Montrer que si F et G sont deux ouverts de E , $F \times G$ est un ouvert de E^2
2. Mêmes questions pour le produit de deux fermés, de deux compacts
3. Soit A un compact de E . Soit $B = \cup_{(x,y) \in A^2} [x, y]$. Montrer que B est une partie compacte de \mathbb{R}^p .

(montrer que B est l'image d'un compact par une application continue.)

3. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'une base $(e_i)_{i=1}^p$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

Soit f une application de $]0, 1]$ dans E lipschitzienne de rapport k .

- On pose $u_n = f(2^{-n})$. Montrer $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq k2^{-n-1}$.
- En étudiant les coordonnées des u_n , montrer que la suite (u_n) converge. Soit l sa limite
- montrer que $f(x)$ tend vers l si x tend vers 0

4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On définit sur :

$$\forall f \in E, N(f) = |f(0)| + \sup \left(\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, (x, y) \in [0, 1]^2, x \neq y \right)$$

$$\forall f \in E, \|f\| = \sup(|f(t)|, t \in [0, 1]) + \sup \left(\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, (x, y) \in [0, 1]^2, x \neq y \right)$$

Montrer que N et $\|\cdot\|$ sont des normes équivalentes sur E .

5. Soit $f_n : t \mapsto t^n$, calculer $\|f_n\|_\infty$ et $N(f_n)$

Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$

6. (long, faire des figures)

Soit \mathbb{R}^2 espace euclidien muni de sa base canonique orthonormale directe. et K un compact non vide de E .

- Montrer que pour tout élément a de E il existe un plus petit r tel que $K \subset B'(a, r)$
- Montrer que l'application ϕ qui à a associe r est 1-lipschitzienne, donc continue.
- Montrer qu'il existe un plus petit (pour le rayon) disque fermé contenant K :
 - Montrer que $\{r = \phi(a), a \in \mathbb{R}^2\}$ admet une borne inférieure r_0
 - En introduisant $A_0 = \{a \in \mathbb{R}^2, \phi(a) \leq r_0 + 1\}$, montrer que r_0 est un plus petit élément.
- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs distincts et $z = \frac{x+y}{2}$ le milieu des deux vecteurs.
 - Montrer : $\|m - x\|^2 = \|m - z\|^2 + \|z - x\|^2 + 2 \langle m - z, x - z \rangle$
 - En déduire $\|m - x\|^2 + \|m - z\|^2 = 2 \left(\|m - z\|^2 + \|z - x\|^2 \right)$
 - Soit $R > 0$, Montrer qu'il existe un réel $r < R$ tel que

$$B'(x, R) \cap B'(y, R) \subset B'(z, r)$$

- Montrer qu'il existe un unique plus petit disque fermé contenant K .
 - Quel est ce disque si K est un segment, un triangle.
- (5/2 : \mathbb{R}^2 ne sert à rien vous pouvez faire l'étude dans un EVE quelconque en remplaçant disque par boule.)

7. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Soit $f \in C^0(E, E)$ vérifiant $\forall x \in E, f(x) = f(ax)$

Montrer $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} f(x) = f(a^{-n}x)$.

Montrer que f est constante.

Déterminer les fonctions continues de E dans E vérifiant : $\forall x \in E, f(x) + f(ax) = 0$

Que peut-on dire si $a < 1$? si $a = 1$

8. Soit $A = \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On veut montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est continue. Soit donc $M \in A$.

On prend une norme telle que $\forall (P, Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|PQ\| \leq \|P\| \|Q\|$

On considère $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M + H \in A$

- Montrer $(M + H)^{-1} - M^{-1} = -(M + H)^{-1} H M^{-1}$
- Montrer que : $\exists K > 0, \exists \varepsilon > 0, \|H\| \leq \varepsilon \implies \|(M + H)^{-1}\| \leq K$
(c'est à dire $(M + H)^{-1}$ est borné au voisinage de $H = (0)$)
- conclure.

9. On se place dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

on rappelle que pour tout couple (M, N) de matrices $\|MN\|_\infty \leq p \|M\|_\infty \|N\|_\infty$

A toute matrice A on associe la suite $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$

- Montrer $\|A^k\|_\infty \leq p^{k-1} \|A\|_\infty^k$
- Quel majorant de $\|S_{n+1} - S_n\|_\infty$ en déduit-on?
- En étudiant les coefficients de la matrice montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
Remarque sa limite $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est noté e^A (exponentiel de la matrice A)