

DERIVATION DES FONCTIONS REELLES D'UNE VARIABLE REELLE

objectifs : rappels de première année sur les fonctions réelles d'une variable réelle .

On notera I et J deux **intervalles** de \mathbb{R} et f une application de I dans \mathbb{R}

1. DERIVATION

1.1. Définition

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} .

- On dit que f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si la fonction $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet quand x tend vers x_0 à droite une limite finie notée $f'(x_0^+)$ ou $f'_d(x_0)$
- On peut aussi définir la dérivée à gauche: $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- pour x intérieur à I , on dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x et si $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Cette valeur commune est alors la dérivée de f en x_0 notée $f'(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$
- toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 .
- f est dérivable sur un intervalle ouvert I si et seulement si f est dérivable en tout point de I . La fonction dérivée se note alors f' ou $\frac{df}{dx}$ ou $D(f)$.
- f est dérivable sur le segment $I = [a, b]$ si et seulement si f est dérivable sur $]a, b[$,dérivable à droite en a et à gauche en b .Par abus de notation on notera dans ce cas $f'(a) = f'(a^+)$ et $f'(b) = f'(b^-)$
- Ces définitions et notations s'étendent de façon naturelle aux intervalles contenant une seule de leurs bornes
- On note $C^1(I, J)$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans J et ayant sur I une dérivée continue.

1.2. Développement limité d'ordre 1

f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = l$ si et seulement si sur un voisinage de x_0 :

$$\exists \epsilon(x) , f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + (x - x_0)\epsilon(x - x_0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} (\epsilon(x - x_0)) = 0$$

1.3. Structure et Calculs

- $C^1(I, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre et la dérivation est linéaire de $C^1(I, \mathbb{R})$ sur $C^0(I, \mathbb{R})$
- le produit de deux fonction C^1 sur I est C^1 sur I et $\forall (f, g) \in C^1(I, \mathbb{R}), (fg)' = f'g + fg'$
- Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ ne prenant pas la valeur 0 alors $\frac{1}{f} \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- Soient $f \in C^1(I, J)$ et $g \in C^1(J, \mathbb{R})$ alors $g \circ f \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$
- Si f est C^1 bijective de I sur J et si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est C^1 de J dans I et : $\forall x \in J, (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

1.4. Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe c élément de $]a, b[$ vérifiant $f'(c) = 0$

1.5. Formule des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ alors: $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

En pratique on utilisera avec les mêmes hypothèses:

$$\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

1.6. Fonction lipschitzienne:

Une fonction est dite lipschitzienne sur I si et seulement si :

$$\exists k, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

k est le rapport.

La formule des accroissements finis dit donc que si f est C^1 sur un intervalle à dérivée bornée, elle y est lipschitzienne.

1.7. Sens de variation d'une fonction C^1 .

- f' est nulle sur I si et seulement si f y est constante.
- f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I
- si f' est strictement positive sur I et si f' s'annule en un nombre fini de points de I alors f est strictement croissante sur I .
- si f' change de signe en x_0 f présente un extremum local en x_0 .

1.8. Dérivée d'un prolongement :

si f est continue sur $[a, b]$ dérivable sur $[a, b[$ et si $f'(x)$ admet en b^- une limite l alors f est dérivable à gauche en b et $f'(b^-) = l$. Le résultat est vrai aussi en a^+ pour f dérivable sur $]a, b]$ ou encore en x_0 pour f dérivable sur $]a, b[-\{x_0\}$.

2. DERIVEES SUCCESSIVES:

2.1. Définitions

la dérivée n^{eme} de f est définie par récurrence par

- $f^{(0)} = f$,
- si f est dérivable sur $I : f^{(1)} = f'$
- si $f^{(n)}$ est dérivable sur I alors $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = (f')^{(n)}$.

pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\underline{C^n(I, J)}$ l'ensemble des fonctions de I dans J admettant une dérivée n^{eme} continue. on note $\underline{C^\infty(I, J)}$ l'ensemble des fonctions de I dans J admettant une dérivée n^o continue pour tout entier n .

2.2. Propriétés:

- Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- $C^n(I, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel et pour $n \in \mathbb{N}$ l'application $D^n : f \mapsto f^{(n)}$ est linéaire.
- Si f et $g \in C^n(I, \mathbb{R})$ alors $fg \in C^n(I, \mathbb{R})$ et pour $n \in \mathbb{N} : (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (Formule de Leibniz)
- Si $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et si f ne prend pas la valeur 0 alors $1/f \in C^n(I, J)$
- Si $f \in C^n(I, J)$ et $g \in C^n(J, \mathbb{R})$ alors $g \circ f \in C^n(I, \mathbb{R})$
- Si f est C^n bijective de I sur J et si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est C^n de J dans I

3. CONVEXITE

3.1. Convexité sur un intervalle

On dit qu'une fonction est **convexe** sur un intervalle I si et seulement si pour tout couple (a, b) de points de I le graphe de f sur $[a, b]$ est situé sous la corde $(a, f(a)) (b, f(b))$:

$$\forall (a, b) \in I^2 \forall x \in [a, b] f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Une fonction f est concave si et seulement si $(-f)$ est convexe.

3.2. Inégalité barycentrique

Pour traduire que le point sur la courbe est sous le point sur la corde on peut passer par les barycentres :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^+)^2, \lambda + \mu \neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}\right) \leq \frac{\lambda f(x) + \mu f(y)}{\lambda + \mu}$$

ou de façon plus général: Si f est convexe sur I alors pour tout n -uplet $(x_i)_{i=1}^n$ de points de I et tout n -uplet $(\lambda_i)_{i=1}^n$ de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i f(x_i))$$

3.3. Convexité d'une fonction C^1 :

Une fonction $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .
le graphe de f est alors au dessus de la tangente en $(x_0, f(x_0))$ au voisinage de x_0 .

3.4. Cas des fonctions C^2

Une fonction C^2 est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée seconde y est positive.
Une fonction C^2 est concave sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée seconde y est négative
On a un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$ si et seulement si f'' s'annule et change de signe en x_0

4. FORMULES DE TAYLOR :

4.1. Définition

Soit f n fois dérivable en x_0 . Le polynôme de Taylor de f en x_0 à l'ordre n est la fonction polynôme

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0)$$

4.2. Restes de Taylor:

On appelle reste de Taylor à l'ordre n la différence $f(x) - T_{n,f,x_0}(x)$.

4.2.1. Formule de Taylor reste intégrale:

Soit une fonction $f \in C^{n+1}$ sur l'intervalle $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

4.2.2. Inégalité de Taylor Lagrange (propriété globale)

Soit une fonction $f \in C^{n+1}$ sur l'intervalle $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

avec M_{n+1} est un majorant sur I de $|f^{(n+1)}|$.

4.2.3. Formule de Taylor Young (propriété locale)

Soit une fonction $f \in C^n$ sur un intervalle I contenant x_0 .

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + o(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + O(x-x_0)^n$$

4.3. Développement limité:

Une fonction f admet au voisinage de x_0 un développement limité d'ordre n si et seulement si il existe des réels $(a_i)_{i=0}^n$ tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

• lien avec la classe :

- Si une fonction admet un développement limité d'ordre 0 en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0}(f) = a_0$. On peut donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$
- Si la fonction admet un développement limité d'ordre 1 alors la fonction ainsi prolongée en x_0 est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$
- Si la fonction ainsi prolongée admet un développement limité d'ordre 2 alors on ne peut plus en déduire que f est deux fois dérivable (exemple $x^3 \sin(1/x)$ en $x_0 = 0$)
- Si une fonction est n fois dérivable en x_0 alors la formule de Taylor Young donne le développement limité.

• calculs:

- Si f admet en x_0 un développement limité d'ordre n alors f admet en x_0 un développement limité d'ordre m pour tout $m < n$ obtenu par troncature.
- Si f et g admettent en x_0 un développement limité d'ordre n alors
 - $f + g$ admet en x_0 un développement limité d'ordre n obtenu en ajoutant les développements de f et g
 - fg admet en x_0 un développement limité d'ordre n obtenu en tronquant le produit des développements de f et g
- Si f admet en x_0 un développement limité d'ordre n et si g admet en a_0 un développement limité d'ordre n alors $g \circ f$ admet en x_0 un développement limité d'ordre n obtenu en tronquant le composé des développements limités
- Si f admet en x_0 un développement limité d'ordre n et si $a_0 \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet en x_0 un développement limité d'ordre n .

Pour le calcul on écrit: $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{(f(x)-a_0)}{a_0}}$ et on utilise le développement en 0 de $\frac{1}{1+u}$.

ou on procède par identification.