

Feuille d'exercices numéro 7bis (dérivation)

pour le jeudi 8 novembre (classe entière)

1. réflexion sur le cours:

1. Soit E un espace vectoriel euclidien . Le produit scalaire est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme est la norme euclidienne.

- Montrer que si $f \in C^1(\mathbb{R}, E \setminus \{\vec{0}\})$ alors $g = \|f\|$ est C^1 et exprimer g' en fonction de f et f' .
- On suppose $f \in C^1(\mathbb{R}, E)$ et $f(x_0) = 0$. Montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et calculer alors $g'(x_0)$.

2. Soit $(f(t), g(t), h(t))$ trois fonctions C^1 d'un intervalle I dans \mathbb{R}^3 . On suppose que à tout instant t la base $(f(t), g(t), h(t))$ est une base orthonormée.

- En dérivant $\langle f(t), f(t) \rangle = 1$ montrer que $f'(t) \perp f(t)$
- Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{i=1..3 \\ j=1..3}} = \text{Mat}_{(f(t), g(t), h(t))} (f'(t), g'(t), h'(t))$. montrer que M est une matrice antisymétrique.

Rappel : si (I, J, K) est une base orthonormée les coordonnées d'un vecteur x dans cette base sont les produits scalaires : $x = \langle I, x \rangle I + \langle J, x \rangle J + \langle K, x \rangle K$

3. On se donne $a > 0$ fixé.

- Soit $g : \forall x \in \mathbb{R}^{+*} : g(x) = x^a$
 - Montrer que g est C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et calculer $g^{(k)}(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$
 - Montrer que g est C^∞ sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $a \in \mathbb{N}^*$, et calculer alors $g^{(k)}(0)$ pour tout entier k .
 - Si $a \notin \mathbb{N}^*$, soit $p = E(a)$, montrer que g est C^p et pas C^{p+1} sur \mathbb{R}^+ et calculer $g^{(i)}(0)$ pour $i \leq p$
- Soit $\alpha > 0$. On étudie la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R} , f(x) = |x|^\alpha$
 - A quelle condition sur a f est-elle C^∞ sur \mathbb{R} , C_{pm}^∞ sur \mathbb{R}
 - Déterminer les entiers n tels que f soit C^n sur \mathbb{R} , C_{pm}^n sur \mathbb{R}

4. Pour chaque fonction préciser sur quel domaine elle est C^∞ , et calculer sa dérivée n^{eme} pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) $f : x \mapsto \frac{1}{x-x_0}$, avec $x_0 \in \mathbb{C}$, b) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-x}$ c) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ d) $f : x \mapsto e^{-4x} \cos(3x)$

5. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = (f(x))^2$

- montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(2^{-n}x) = (f(x))^{2^{-n}}$
- Si $f(0) = 0$ montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
- si $f(0) \neq 0$ montrer $f(0) = 1$ puis $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(xf'(0))$ (calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(2^{-n}x)-1}{2^{-n}} \right)$)
- En déduire toutes les fonctions f solutions.

2. exercices

1. Soient $f \in C^1(I, E)$ et $x_0 \in I$. Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x-x_0} \right)$

2. Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. si $f(0) \neq 0$ montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge
2. si $f(0) = 0$ montrer que la suite converge et calculer sa limite .

La rédaction si f est seulement C^1 est délicate . Vous pouvez essayer d'abord le cas plus simple ou f est C^2 sur $[0, 1]$

3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $h > 0$. On suppose que f et f'' sont bornés sur \mathbb{R} et on pose $M_i = \sup_{\mathbb{R}} (|f^{(i)}|)$.

- Ecrire Taylor Lagrange entre x et $x+h$ puis entre x et $x-h$
- montrer que $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. en déduire un premier majorant de $|f'|$
- Montrer

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

4. Soit $f \in C^1(]0, 1[, \mathbb{C})$ telle que f' soit bornée sur $]0, 1[$. On pose $k = \sup_{]0, 1[} (|f'|)$

- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{-n}$
 - Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq k |x_{n+1} - x_n|$
 - En déduire que la suite (x_n) converge
- Montrer que f admet une limite en 0^+ .

5. Soit la fonction

$$\begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{e^{(x^2)} - 1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^1 sur \mathbb{R}^* et que f' a le signe de $g(x) = (2x^2 - 1)e^{(x^2)} + 1$
2. Déterminer les variations de f .
3. (5/2) Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f'(0)$
(3/2) Montrer que f est C^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(0)$ et admettre que f est C^∞ sur \mathbb{R}
4. Montrer que f admet une fonction réciproque h C^∞ sur \mathbb{R}
5. donner le développement limité à l'ordre 3 de h en 0.

6. Soit f définie par $f(x) = \arctan(x)$

- montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un polynôme P_n vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

et montrer la relation de récurrence $P_{n+1} = (X^2 + 1) P'_n - 2nX P_n$

- Montrer $(1+x^2) f^{(3)}(x) + 4x f''(x) + 2f'(x) = 0$
- En déduire une relation de récurrence entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n
- Montrer

$$P_n(\cot an(\theta)) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{\sin(n\theta)}{(\sin(\theta))^n}$$

En déduire que $f^{(n)}$ est bornée et que $\sup_{\mathbb{R}} (|f^{(n)}|) \leq (n-1)!$

7. Soit $f \in C^1([0, \pi/2[, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f' \leq 1 + f^2$

Montrer: $\forall x \geq 0, f(x) \leq \tan(x)$

indication étudier $g : g = \arctan \circ f$

8. Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^{+*})$. Montrer :

$$\exists c \in]a, b[, \frac{f(b)}{f(a)} = e^{((b-a) \frac{f'(c)}{f(c)})}$$

indication : introduire $\ln \circ f$

9. On cherche les fonctions continue sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \int_x^y f(t) dt$$

On note F la primitive nulle en 0 de f .

1. montrer $\forall X \in \mathbb{R}, f(X) = F(X + \frac{1}{2}) - F(X - \frac{1}{2})$. En déduire que f est C^∞ sur \mathbb{R} .
2. Montrer $\forall h \in \mathbb{R}, hf(x+h/2) = F(x+h) - F(x)$
3. En prenant un développement limité à l'ordre 3 en $h = 0$ des deux membres calculer f''
4. Déterminer f .
5. Déterminer toutes les applications $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$$