ESPACES VECTORIELS

compléments de spé

Dans tout le chapitre E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie ou non , non réduit au vecteur nul.

1. COMPLEMENTS SUR LES BASES:

1.1. famille libre :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou non .

- Une famille finie $(x_i)_{i=1}^n$ est libre si et seulement si la seule combinnaison linéaire nulle des x_i a des coefficients tous nuls:

$$\text{soit } (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n\text{: } \left(\sum_{i=1} \lambda_i x_i = \overrightarrow{0}\right) \Rightarrow (\forall i \text{ , } \lambda_i = 0)$$

- Une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous famille finie est libre

  ex : $(|x-\alpha|)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- En particulier si $I=\mathbb{N}$: $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si toute sous famille $(x_i)_{i=0}^n$ est libre

  ex : les familles étagées en degré dans $\mathbb{K}[X]$ sont libres.

1.2. famille génératrice :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou non .

- Une famille finie $(x_i)_{i=1}^n$ est génératrice si et seulement tout élément v de E est combinaison linéaire des (x_i)

$$\forall v \in E \text{ , } \exists (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \text{ , } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

  E est alors obligatoirement de dimension finie .

- Une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'un <u>nombre fini</u> de (x_i)

- En particulier si $I=\mathbb{N}$: $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est génératrice si et seulement si

$$\forall v \in E \text{ , } \exists n \in \mathbb{N} \text{ , } \exists (\lambda_i)_{i=0}^n \in \mathbb{K}^n \text{ , } v = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$$

  ex : les familles $(P_i)_{i=0}^{+\infty}$ étagées en degré dans $\mathbb{K}[X]$ sont génératrices

1.3. base:

Une base est une famille libre et génératrice.

2. ALGEBRE

2.1. définition

Soit E muni de 2 lois internes + et * et d'une loi externe .E est une algèbre si et seulement si:
$(E,+,*)$ est un anneau et $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall (x,y) \in E^2\ \lambda.(x*y) = (\lambda.x)*y = x*(\lambda.y)$

2.2. applications linéaires

$\mathcal{L}(E)$ muni de l'addition de la multiplication externe et de la composition est une algèbre.

L'ensemble des éléments inversibles de $(\mathcal{L}(E), o)$ est l'ensemble des automorphismes. Il est noté $GL(E)$.C'est un groupe pour la loi $\circ$

2.3. morphisme

Un morphisme d'algèbre est une application linéaire qui est aussi un morphisme d'anneau.

On définit aussi endomorphisme ,isomorphisme,automorphisme d'algèbre.

2.4. sous algèbre

Une sous algèbre est un sous ensemble qui est à la fois un sous espace vectoriel et un sous anneau.

Pour montrer que F est une sous algèbre de E on montre que F est un sous espace vectoriel , stable par la multiplication interne et contenant le neutre de cette multiplication.

3. POLYNÔMES DE LAGRANGE:

3.1. théorèmes:

- Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. L'application f de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ est un isomorphisme

- Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts et $(y_i)_{i=0}^n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ distincts ou non. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant: $\forall i \in [0..n], P(x_i) = y_i$

3.2. calcul:

Les polynômes d'interpolation de Lagrange sont les polynômes: $L_i = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$

On a alors $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i$ (formule d'interpolation de Lagrange)

3.3. application géométrique:

- droite du plan passant par deux points: Soit (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points du plan avec $x_0 \neq x_1$. l'équation de la droite passant par ces deux points est
$$y = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$
soit
$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$
mais ce n'est pas le plus simple : $y = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ est plus simple et plus naturel
- Par trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ non alignés et tels que les (x_i) soient deux à deux distincts , il passe une nique parabole d'axe vertical. Son équation est
$$y = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

3.4. application aux fractions rationnelles

Soient $(x_i)_{i=1}^n$ n complexes 2 à 2 distincts.Alors pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i=1}^n$ telle que
$$\frac{P}{\prod_{i=1}^n (X - x_i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$
de plus si $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$ alors pour $i \in [[1, n]]$, $\lambda_i = \dfrac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$

3.5. approximation d'une fonction d'une variable réelle :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et $(x_i)_{i=0}^n$ des points de I . Le polynôme de Lagrange de f associé au (x_i) est le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$.

Pour $n = 1$, c'est la corde passant par les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$

4. FORMES LINEAIRE,HYPERPLAN

4.1. définition:

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (le corps de base)

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

4.2. propriétés:

-Si ϕ est une forme linéaire non nulle et si $\phi(v) \neq \vec{0}$ alors $E = Ker(\phi) \oplus Vect(v)$.

-un sous espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si c'est le supplémentaire d'une droite.

-si ψ est une forme linéaire telle que $(x \in \ker(\phi) \Rightarrow \psi(x) = 0)$ alors ψ est proportionnelle à ϕ.

4.3. en dimension finie n>0:

-un sous espace vectoriel H est un hyperplan si et seulement si il est de dimension $n-1$.

-dans une base donnée $(e_i)_{i=1}^n$ toute forme linéaire ϕ s'exprime sous la forme $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ avec $a_i = \phi(e_i)$.

la matrice de ϕ dans cette base est la matrice ligne $M = (a_1, a_2, \cdots a_n)$. On a alors $\phi(x) = MX$ si $X = Mat(x)$.

-vous devez savoir trouver une base de l'hyperplan H donner par son équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$:

si $a_1 \neq 0$ la famille $(v_j)_{j=2}^n$ est une base de H avec $\forall j, v_j = a_j e_1 - a_1 e_j$

5. SOMME , SOMME DIRECTE:

5.1. définition:

Soit $(E_i)_{i=1}^n$ un nombre fini de sous espaces vectoriels.

On appelle <u>somme</u> des E_i l'ensemble

$$F = E_1 + E_2 + \cdots E_n = \sum_{i=1}^n E_i = \left\{ v \in E, \exists (e_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n E_i, v = \sum_{i=1}^n e_i \right\}$$

On dit que la <u>somme est directe</u> si et seulement si la décomposition est unique:

$$\forall v \in \sum_{i=1}^n E_i \ , \exists! (e_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n E_i \ , v = \sum_{i=1}^n e_i$$

la somme directe est notée $\bigoplus_{i=1}^n E_i$

5.2. propriétés:

-la somme (et la somme directe) est un sous espace vectoriel de E

-la somme (et la somme directe) est associative commutative et de neutre $\left\{\vec{0}\right\}$.

-une somme est directe si et seulement si la décomposition de $\vec{0}$ est unique:

$$\forall (x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n E_i, \left(\sum_{i=1}^n x_i = \vec{0} \Longrightarrow \left(\forall i, x_i = \vec{0} \right) \right)$$

-cas particulier : dans le cas $n = 2$ la somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

-généralisation:une somme est directe si et seulement si l'intersection d'un des sous espace avec <u>la somme des autres</u> est réduite à zéro:(intérêt pratique limité) $\forall i$, $E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{\vec{0}\}$

5.3. pratique:

<u>Pour montrer $\sum E_i \subset F$</u> il suffit de montrer que chaque E_i est un sous espace de F.

<u>Pour montrer $\sum E_i = F$</u> vérifier $\begin{cases} \text{que chaque } E_i \text{est un sous espace de } F \\ \text{que } F \subset \sum E_i \text{ par analyse synthèse} \end{cases}$

<u>Pour montrer $F = \oplus E_i$</u>

-vérifier que chaque E_i est un sous espace de F

-montrer la somme en essayant de faire une analyse qui prouve l'unicité (par $\Leftrightarrow$)

-si oui c'est fini

-si non regarder la décomposition de $\vec{0}$

5.4. Somme directe et applications linéaires.

- Si $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, alors pou toute famille d'applications linéaires (u_i) de E_i dans F , il existe une unique application linéaire u telle que pour tout i , u_i soit la restriction de u à E_i
- Si $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit p_i la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{j=1,j\neq i}^{n} E_j$, alors on a : $p_i\circ p_j=\left\{\begin{array}{l} p_i \text{ si } j=i \\ 0 \text{ si } j\neq i \end{array}\right.$, et $\sum_{i=1}^{n} p_i = Id_E$

5.5. en dimension finie:

5.5.1. base adaptée

Théorème : En dimension finie $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ si et seulement si l'union d'une base de chaque E_i donne une base de E .

Définitions:

- Une telle base de E est dite adaptée à la décomposition en somme directe.
- Si F est un S.E.V. de E on appelle base de E adaptée à F toute base de E adaptée à une décomposition $E=F\oplus G$,c'est à dire toute base de E du type $(e_i)_{i=1}^{n}$ telle que $(e_i)_{i=1}^{p}$ soit une base de F.

5.5.2. conséquence

ThéorèmeLa somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si $\dim(\sum_{i=1}^{n} E_i)=\sum_{i=1}^{n}\dim(E_i)$.

5.5.3. pratique en dimension finie

Pour montrer une somme directe $F=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ en dimension finie on peut utiliser la méthode générale . Il est souvent plus simple de

-de vérifier que chaque F_i est un sous espace de F
-de vérifier les dimensions les dimensions $\left(\dim(F)=\sum\dim(E_i)\right)$
-puis au choix :
*vérifier l'unicité de la décomposition de $\vec{0}$
* montrer la somme par analyse synthèse
*prendre une base (simple) de chaque E_i et montrer que l'union est une base de E.

5.5.4. complément en dimension finie si $n=2$:

Montrer que $H=F\oplus G$ est équivalent à montrer que F et G sont supplémentaires dans H . (voir chapitre EV1)

6. SOUS ESPACE STABLE:

6.1. définition:

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.un sous espace vectoriel F de E est stable par f (ou f-stable) si et seulement si $f(F)\subset F$.

6.2. exemples à connaître:

-E et $\left\{\vec{0}\right\}$ sont stables par f
-le noyau et l'image de f sont stables par f.
-si $f\circ g=g\circ f$ alors le noyau et l'image de g sont stables par f.
-on verra aussi des théorèmes de stabilité pour les sous espaces propres.
- une droite D est stable si et seulement si $D=Vect(v), v\neq 0, \exists\lambda\in\mathbb{K}, f(v)=\lambda v$
-un hyperplan H est stable par f si et seulement si $H=Ker(\phi), \phi\neq 0, \exists\mu\in\mathbb{K}, \phi\circ f=\mu\phi$

6.3. endomorphisme induit:

Si F est stable par f l'endomorphisme induit par f sur F est l'endomorphisme f_F de F défini par:

$$\forall v\in F, f_F(v)=v$$

A ne pas confondre avec la restriction de f $(f_{|F})$ qui est élément de $\mathcal{L}(F,E)$

7. POLYNOMES D'ENDOMORPHISME:

7.1. définition:

Soit f un endomorphisme de E.On pose $f^0 = Id_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f$ et par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f$$

Soient f un endomorphisme de E et $P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ on note $P(f) = \sum_{i=0}^{n} p_i f^i$.

On dit que $P(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f.

7.2. propriétés:

-l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'espace vectoriel. L'image est notée $\mathbb{K}[f]$

- Si P et Qsont deux polynômes $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

-Si P et Q sont deux polynômes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.

-Si P et Q sont deux polynômes et si f et g commutent , $P(f)$ et $Q(g)$ commutent

-ker$(P(f))$ et Im$(P(f))$ sont stables par f.

7.3. polynôme matriciel:

Soient $M \in \mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ on note $P(M) = \sum_{i=0}^{n} p_i M^i$;

On définit ainsi un morphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ tel que $(PQ)(M) = P(M)Q(M)$

si P et Q sont deux polynômes $P(M)$ et $Q(M)$ commutent.

si P et Q sont deux polynômes et si M et N commutent alors$P(M)$ et $Q(N)$ commutent.

Si P est un polynôme et si A et B sont semblables alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables et si $A = QBQ^{-1}$ alors $P(A) = Q.P(B).Q^{-1}$