

EXERCICE 1

1. Par l'absurde si r était lipschitzienne, il existerait un k tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|$$

Si on prend $y = 0$ et $x > 0$ on a donc :

$$\forall x \in]0, 1] , 1 \leq K\sqrt{x}$$

ce qui est absurde en faisant tendre x vers 0^+

r n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$

2.

- sur E_0 et E'_0 N ne peut pas être une norme car le sup n'est pas toujours défini dans \mathbb{R} : r donne le contre exemple
- sur E_1 N ne peut pas être une norme car une fonction constante non nulle serait un élément non nul de E_1 de "norme" nulle.
- sur E'_1 par contre N est une norme :
 - Le sup existe car d'après l'égalité des accroissement finis (f étant dérivable sur $[0, 1]$) :

$$\forall (x, y) \in D , \exists c \in]0, 1[, \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = f'(c)$$

f' étant continue sur le **segment** $[0, 1]$ y est bornée. Donc $\left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| , (x, y) \in D \right\}$ est non vide majoré dans \mathbb{R} et admet une borne supérieure.

- Le sup est positif car l'ensemble contient des réels positifs.
- Si le sup est nulle $\forall (x, y) \in D, f(x) = f(y)$. On a donc $f(0) = 0$ et en prenant $y = 0 \forall x \in]0, 1]$, $f(x) = 0$ et donc $f = 0$ sur $[0, 1]$
- l'inégalité triangulaire et le produit par un scalaire ne pose pas de problème à rédiger.

N est une norme seulement sur E'_1

EXERCICE 2

1. On utilisera souvent que si $x \geq 0$ \sqrt{x} est définie et $(\sqrt{x})^2 = x$ et si $x \leq 0$, $\sqrt{-x}$ est définie et $(\sqrt{-x})^2 = -x$

1. si $x = y$ on a de suite $h(0) = 0$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = 0$. On a donc $h(x^2) = (h(x))^2$.
3. soit $X \geq 0$ si $x = \sqrt{X}$ et $y = 0$ on a $h(X) = (h(x))^2 \geq 0$ car $h(x) \in \mathbb{R}$
4. soit $X \leq 0$ si $x = 0$, $y = \sqrt{-X}$ on a $h(X) = -(h(y))^2 \leq 0$
5. soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = -x$ on a donc : $(h(x))^2 - (h(y))^2 = h(x^2 - y^2) = h(0) = 0$. Donc $(h(x))^2 = (h(y))^2$. Mais d'après les points précédents , $h(x)h(y) \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = -h(x)$, h est impair
6. si $x = 1, y = 0$ on a $h(1) = h(1)^2$ donc $h(1) \in \{0, 1\}$

2.

- Soit $u \geq 0$ et $v \leq 0$. on prend $x = \sqrt{u}$ et $y = \sqrt{-v}$:

$$\begin{aligned} h(u+v) &= h(x^2 - y^2) = (h(x))^2 - (h(y))^2 \text{ par définition de } h \\ &= h(x^2) - h(y^2) \text{ d'après la question 1.2} \\ &= h(u) - h(-v) = h(u) + h(v) \text{ par imparité de } h \end{aligned}$$

- Soit $u \geq 0$ et $v \geq 0$: On se ramène au cas précédent en posant $u = (u+v) + (-v)$.
On a bien $(u \geq 0, v \geq 0) \Rightarrow (u+v \geq 0, -v \leq 0)$, donc $h(u) = h(u+v) + h(-v)$.
et donc $h(u+v) = h(u) - h(-v) = h(u) + h(v)$ par imparité de h .
- En réunissant ces deux cas :

$$\forall u \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}, h(u+v) = h(u) + h(v)$$

- Si $u \leq 0$ on utilise encore l'imparité de h : On pose $U = -u$ et $V = -v$, on a bien $U \geq 0$ donc $h(U+V) = h(U)+h(V)$ et en multipliant par -1 : $h(u+v) = h(u) + h(v)$

$$\boxed{\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, h(u+v) = h(u) + h(v)}$$

3. Soit alors $x \leq y$ deux réels . Si on prend $u = y - x$ et $v = x$, la question 2 donne $h(y) = h(x) + h(y - x)$.
Or $y - x \geq 0$ donc $h(y - x) \geq 0$ d'après la question 1.

$\boxed{h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

4.

- Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, h(nt) = nh(t)$
 - vrai si $n = 0$ et $n = 1$
 - si $h(nt) = nh(t)$ alors $h((n+1)t) = h(nt) + h(t)$ d'après la question 2 .On a donc $h((n+1)t) = nh(t) + h(t)$ d'après l'hypothèse de récurrence, et donc $h((n+1)t) = (n+1)h(t)$
 - le résultat s'étend par imparité aux entiers négatifs : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, h(nt) = nh(t)$
- si $x = p/q \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) . On peut écrire $h(x) = h(p \cdot 1/q) = ph(1/q)$ en reprenant le résultat précédente avec $n = p$ et $t = 1/q$. On peut aussi écrire $1 = q \cdot (1/q)$ donc $h(1) = qh(1/q)$ et donc $h(p/q) = (p/q)h(1)$

5. Par définition d'une partie entière :

$$E(10^n x) \leq 10^n x < 1 + E(10^n x)$$

si on multiplie l'inégalité par $10^{-n} > 0$ on a bien $x_n \leq x < y_n$

De plus $y_n - x_n = 10^{-n}$ tend vers 0.

De l'encadrement $x_n \leq x < y_n = x_n + 10^{-n}$ on déduit $x - 10^{-n} \leq x_n \leq x$. donc par encadrement $\lim(x_n) = x$ et donc $\lim(y_n) = x$

6. Soit alors $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente $x_n \leq x < y_n$. Mais h est croissante donc $h(x_n) \leq h(x) < h(y_n)$. On utilise maintenant le fait que x_n et y_n sont rationnels :

$$x_n h(1) \leq h(x) < y_n h(1)$$

D'où 2 cas :

- si $h(1) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R} h(x) = 0$
- si $h(1) = 1$ alors $x_n \leq h(x) < y_n$. Et donc en faisant tendre n vers $+\infty$ $h(x) = x$.

On vérifie que les deux fonctions $\tilde{0}$ et Id sont bien solutions du problème.

$\boxed{\text{il y a exactement deux solutions } \tilde{0} \text{ et } Id}$

remarque : attention aux passages à la limite . la fonction n'est pas supposée être continue.

PROBLEME

Les parties B et C proviennent d'un problème de E4A PSI 2005 . La partie D de E3A MP 2006 . La partie A provient de E4A PSI , complétée pour avoir les résultats utiles dans la partie D.

partie A

1. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est donc une série absolument convergente.

$\sum(u_{n+1} - u_n)$ est donc une série convergente et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$

2.

1. h_x est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} avec

$$\forall t > 0, h'_x(t) = \frac{1 - x \ln(t)}{t^{x+1}}$$

On en déduit le tableau de variation suivant:

- h_x croît sur $]0, \exp(1/x)[$
- h_x décroît sur $[\exp(1/x), +\infty[$
- avec $\lim_{0^+}(h_x) = -\infty, h_x(1) = 0, \lim_{+\infty}(h_x) = 0$

2. h'_x est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} avec

$$\begin{aligned} \forall t > 0, h''_x(t) &= \frac{-\frac{x}{t}t^{x+1} - (x+1)t^x(1 - x \ln(t))}{t^{2x+2}} \\ &= \frac{-(2x+1) + x(x+1) \ln(t)}{t^{x+2}} \end{aligned}$$

positif si et seulement si $x(x+1) \ln(t) \geq 2x+1$. Soit comme $x > 0$ si et seulement si $t \geq \exp\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)$

- h_x est concave sur $]0, \exp\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)[$, convexe sur $\left[\exp\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right), +\infty\right[$

3. h_1 est décroissante sur $[e, +\infty[$ et donc comme $3 \geq e$:

$$\forall n \geq 3, \forall t \in [n, n+1], t > e \text{ et donc } \frac{\ln(t)}{t} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\forall n \geq 4, \forall t \in [n-1, n], t > e \text{ et donc } \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{\ln(t)}{t}$$

La fonction étant continue on peut intégrer ces inégalités sur $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$:

$$\boxed{\forall n \geq 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n} \text{ et } \forall n \geq 4, \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln(t)}{t} dt}$$

4. $(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est le terme général d'une suite de signe alterné (défini pour $n \geq 2$), $\frac{\ln(n)}{n}$ décroît à partir du rang 3 et est de limite nulle (croissances comparées). Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ convergente.

1. On a pour $n \geq 3$: $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ qui donne la divergence de $\sum \left| (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \right|$ par minoration.

$$\boxed{\text{la série } \sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \text{ est semi convergente}}$$

Partie B

1.

- On a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} ((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2)$$

Or la seconde inégalité de la question **A.3** donne :

$$\forall n \geq 4, \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2} \right]_{n-1}$$

soit en translatant l'indice :

$$\forall n \geq 3, \frac{1}{2} ((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2) \geq \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

On obtient donc

$$\forall n \geq 3, a_{n+1} - a_n \leq 0$$

et la suite (a_n) décroît à partir du rang 3.

- En utilisant cette fois la première inégalité de **A.3** (et en sommant), on a

$$t_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt$$

$$t_n \geq \frac{\ln(2)}{2} + \frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$$

et donc

$$\forall n \geq 3, a_n \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$$

La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante minorée, elle converge.

La suite $(a_n)_{n > 3}$ est décroissante à partir du rang 3 et converge

2. Dans $S_{2n} + t_{2n}$ les termes d'indices impairs se simplifient et ceux d'indices pairs s'ajoutent ::

$$S_{2n} + t_{2n} = \sum_{k=1}^n 2 \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln(2)}{k} + \frac{\ln(k)}{k} \right) =$$

$$\ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + t_n$$

On a donc

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On fait intervenir les suites u_n et a_n :

$$S_{2n} = (u_n + \ln(n)) \ln(2) + a_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}$$

$$= u_n \ln(2) + a_n - a_{2n} + \left(\ln(2) \ln(n) + \frac{(\ln(n))^2 - \ln(2n)^2}{2} \right)$$

Or $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ donc

$$\frac{(\ln(n))^2 - \ln(2n)^2}{2} = \frac{(\ln(n) + \ln(2n))(\ln(n) - \ln(2n))}{2} = \frac{(\ln(2) + 2\ln(n))(-\ln(2))}{2}$$

On a donc

$$S_{2n} = u_n \ln(2) + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

On peut aussi partir de $\ln(2n)^2 = (\ln(2) + \ln(n))^2$ et développer par le binôme de Newton.

(S_{2n}) étant une extraite de la suite convergente (S_n) qui converge vers S , on a donc

$$S = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

Remarque : n'oubliez pas de signaler la convergence de (S_n) , la convergence des termes pairs ne suffit en général pas : $(-1)^n$

Partie C

1. Pour toute fonction f bornée sur $[1, +\infty[$ on posera $\|f\|_\infty = \sup(|f(x)|, x \geq 1)$

1. v_n étant dérivable sur $[1, +\infty[$, le calcul donne :

$$v'_n(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = h_x(n+1) - h_x(n)$$

2. Soit $x \geq 1$. h_x décroît sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et donc sur $[e, +\infty[$ (puisque $e^{1/x} \leq e$). On en déduit que v'_n est négative sur $[1, +\infty[$ pour $n \geq 3$ et donc

$$\forall n \geq 3, \forall x \geq 1, 0 \leq v_n(x) \leq v_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, $\|v_n\|_\infty = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente .

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge normalement sur } [1, +\infty[}$$

2.

1. Soit $n \geq 1$.

L'application $t \mapsto \frac{1}{t^x} = e^{-x \ln(t)}$ est continue sur $[n, n+1]$ pour tout $x \geq 1$, donc l'intégrale existe. De plus

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \begin{cases} [\ln(t)]_n^{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) & \text{si } x = 1 \\ \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_n^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donc

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^x} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{n^x} - \frac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

L'application $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc la continuité de w_n équivaut à celle de $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$.

- Pour $x > 1$ on a un quotient à dénominateur non nul de fonctions continue, donc une fonction continue
- En 1^+ on revient à $\frac{e^u - 1}{u}$:

$$\frac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} = \frac{e^{(1-x)\ln(n+1)} - 1}{1-x} - \frac{e^{(1-x)\ln(n)} - 1}{1-x}$$

Or $\frac{e^{(1-x)\ln(n+1)} - 1}{1-x} \sim \frac{(1-x)\ln(n+1)}{1-x} = \ln(n+1)$. Donc en retranchant les limites (pas les équivalents)

$$\lim \left(\frac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} \right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

variantes : utiliser un DL ou écrire que $\frac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} = \frac{N(x) - N(1)}{x-1} \rightarrow N'(1)$

2. Si $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît sur $[n, n+1]$ et on a donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall x \geq 1, \forall n \geq 1, 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$$

3. Ainsi, $\|w_n\|_\infty \leq \|v_n\|_\infty = \frac{1}{n(n+1)}$ et on a donc convergence normale de $\sum w_n$.

On a donc une série de fonctions continues sur $[1, +\infty[$ qui converge normalement sur cette intervalle.

$$\boxed{W \text{ est continue sur } [1, +\infty[}$$

3.

1. Par relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^n w_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \frac{(n+1)^{1-x} - 1}{1-x}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient comme $1-x < 0$:

$$\boxed{\forall x > 1, W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}}$$

remarque : attention à ne pas écrire de somme de série divergente dans le calcul

2. Par continuité de W en 1^+ , on a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right) = W(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \right)$$

On remarque enfin que, par télescopage,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \right) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N+1) = u_{N+1} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \gamma \end{aligned}$$

et on conclut que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right) = \gamma}$$

4.

1. Soit $x \geq 1$. La suite $(\phi_n(x))$ est de signe alternée et de limite nulle. En outre, $(|\phi_n(x)|)$ décroît. Le critère spécial des séries alternées prouve alors que $\sum \phi_n(x)$ converge.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_{2n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n+1)^x} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^x} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^x} \\ \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^x} + \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ impair}}}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k^x} &= \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} = - \sum_{n=2}^{2N+1} \phi_n \end{aligned}$$

en passant à la limite

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} v_{2n} &= \phi_1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \phi_n \\ \phi &= \phi_1 - \sum_{n=1}^{+\infty} v_{2n} \end{aligned}$$

remarque : attention à ne pas écrire de somme de série divergente dans le calcul

Les calculs de **C.1** donnent la continuité de v_{2n} et $\|v_{2n}\| \leq \frac{1}{(2n)(2n+1)}$ ce qui assure, par convergence normale, la continuité de ϕ sur $]1, +\infty[$

2. dérivation termes à termes :

- $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$
- pour tout $n \geq 1$, ϕ_n est C^1 sur $]1, +\infty[$ de dérivée : $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$
- sur tout segment $[a, b] \in]1, +\infty[$, $|\phi'_n(x)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$ terme général d'une série convergente car $n^{\frac{1+a}{2}} \frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}}$ a une limite nulle avec $\frac{a+1}{2} > 1$.

ce qui assure la convergence normale de $\sum \phi'_n$ sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$;

$$\boxed{\phi \in C^1(]1, +\infty[, \mathbb{R})}$$

3. Si on pose $k_x(t) = \frac{(\ln(t))^2}{t}$, l'étude de k'_x montre que k_x est maximum si $t = e^{2/x}$ et que k_x décroît sur $[e^{2/x}, +\infty[$. On a $v'_n(x) = k_x(n+1) - k_x(n)$ qui est positif pour tout $x \geq 1$ dès que $n > e^2 \cdot v'_n$ est alors croissante négative sur $[1, +\infty[$. On a donc $\|v'_n\| = |v'_n(1)| = -\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n)}{n}$ qui est les terme général d'une série convergente car la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ converge. Le théorème de dérivation termes à termes s'applique donc à la série $\sum v_{2n}$ donc aussi à $\sum \phi_n$ et on a

$$\forall x \geq 1, \phi'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$$

En particulier,

$$\boxed{\phi'(1) = S}$$

5.

1. On a pour $x > 1$: $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ et $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ donc

$$F(x) - \phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} = \frac{1}{2^{x-1}} F(x)$$

d'où la formule demandée

$$\boxed{\forall x > 1, \phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)}$$

remarque : ici toutes les séries convergent. Par prudence on peut aussi passer par les sommes partielles.

2. On a en posant $h = x - 1$

$$1 - 2^{-h} = 1 - e^{-h \ln(2)} = h \ln(2) - \frac{h^2 (\ln(2))^2}{2} + o(h^2)$$

Par ailleurs, la question C.3.2 donne

$$F(x) = \frac{1}{h} + \gamma + o(1)$$

en faisant le produit, on obtient

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1 - 2^{1-x})F(x) = \left(h \ln(2) - \frac{h^2 (\ln(2))^2}{2} + o(h^2) \right) \left(\frac{1}{h} + \gamma + o(1) \right) \\ &= \left(\ln(2) - \frac{h (\ln(2))^2}{2} + o(h) \right) (1 + \gamma h + o(h)) \\ &= \ln(2) + \left(\gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2} \right) h + o_1(h) \end{aligned}$$

La fonction ϕ étant C^1 sur $[1, +\infty[$ on a $\phi(1) = \ln(2)$ et $\phi'(1) = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$

$$\boxed{S = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}}$$

Partie D

1. Les hypothèses 1 et 3 assurent que la série vérifie le critère spécial des séries alternées..Elle converge donc

2. de même $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$, vérifie les hypothèse du critère. R_n est donc du signe du premier terme

$$|R_n| = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

On a donc par télescopage :

$$\begin{aligned}
|R_n| + |R_{n+1}| &= (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) \\
&= (-1)^n (-1)^n u_n = u_n
\end{aligned}$$

et par changement d'indices

$$\begin{aligned}
|R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k - (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) \\
&= (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p} u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+n+1} u_{n+p+1} \right) \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1})
\end{aligned}$$

3. La suite $p \rightarrow (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1})$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées:

- le signe est alterné car (u_n) décroît et donc $(u_{n+p} - u_{n+p+1}) > 0$ (hypothèse 3)
- la suite $(u_{n+p} - u_{n+p+1})_p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, par composition d'après l'hypothèse 3
- le terme général $(u_{n+p} - u_{n+p+1})$ décroît d'après l'hypothèse 4

$|R_n| - |R_{n+1}|$ est donc du signe du premier terme donc positif. La suite $(|R_n|)$ décroît

4. On a donc $|R_{n+1}| \leq |R_n|$ et donc après **D.1** $u_n = |R_n| + |R_{n+1}| \leq 2|R_n|$ et $u_n = |R_n| + |R_{n+1}| \geq 2|R_{n+1}|$
D'où l'encadrement

$$\boxed{u_n \leq 2|R_n| \leq u_{n-1}}$$

On peut diviser par $u_n > 0$:

$$1 \leq 2 \frac{|R_n|}{u_n} \leq \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

l'hypothèse 2 assure par encadrement que $\lim \left(2 \frac{|R_n|}{u_n} \right) = 1$

$$\boxed{|R_n| \sim \frac{u_n}{2}}$$

5. Il suffit de vérifier que $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ vérifie les hypothèses précédentes:

- pour $n \geq 1$ on a bien $u_n > 0$
-

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \right)$$

$$\text{donc } \lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 1$$

- $\lim (u_n) = 0$ et $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante **A.4**

- enfin : $\frac{\ln(n+2)}{n+2} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n}$ soit $h_1(n+2) - h_1(n+1) \leq h_1(n+1) - h_1(n)$. On veut donc $h_1 \left(\frac{(n) + (n+2)}{2} \right) \leq \frac{h_1(n) + h_1(n+2)}{2}$.

Il suffit donc de voir si h_1 est convexe, donc d'après **A.2.2** de voir si $n \geq e^{3/2}$ soit $n \geq 5$.

Donc la suite vérifie les hypothèses voulues à partir du rang 5.

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \sim \frac{\ln(n)}{2n}}$$