

SPE PC2

Samedi 17 novembre

le sujet comporte deux exercices et un problème
calculatrices interdites

EXERCICE 1

On considère les 4 espaces vectoriels : $E_0 = C_0([0, 1], \mathbb{C})$, $E_1 = C_1([0, 1], \mathbb{C})$, $E'_0 = \{f \in E_0, f(0) = 0\}$, $E'_1 = \{f \in E_1, f(0) = 0\}$

On note $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2, x \neq y\}$

Et on considère l'application qui a toute fonction f définie sur $[0, 1]$ associe, si possible :

$$N(f) = \sup \left(\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, (x, y) \in D \right)$$

1. Soit la fonction r définie sur $[0, 1]$ par $\forall x \in [0, 1], r(x) = \sqrt{x}$
Montrer que r n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$
2. Etudier si N est une norme sur chacun des 4 ensembles E_0, E_1, E'_0, E'_1 .
 - si la réponse est "non" ne donner que le contre exemple en une ou deux lignes
 - si la réponse est "oui" rédiger toutes les vérifications.

EXERCICE 2

On veut déterminer les fonctions h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x^2 - y^2) = (h(x))^2 - (h(y))^2$$

1. Montrer : $h(0) = 0$.
 2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x^2) = (h(x))^2$.
 3. Montrer : $\forall x \geq 0, h(x) \geq 0$.
 4. Montrer : $\forall x \leq 0, h(x) \leq 0$.
 5. Montrer que h est impaire.
 6. quelles sont les valeurs possibles pour $h(1)$?
2. Montrer $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, h(u + v) = h(u) + h(v)$.
(on pourra commencer par le cas où $u \geq 0$ et $v \leq 0$)
 3. Montrer que h est croissante sur \mathbb{R} .
 4.
 - Montrer $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, h(nt) = nh(t)$
 - calculer en fonction de $h(1)$, la valeur de $h(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$
 5. Soit x un réel. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = 10^{-n}E(10^n x)$ et $y_n = 10^{-n}(1 + E(10^n x))$.
Montrer $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leq x \leq y_n$
Déterminer la limite des suites (x_n) et (y_n)
 6. Déterminer les fonctions h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x^2 - y^2) = (h(x))^2 - (h(y))^2$

PROBLEME

\mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel.

Dans la partie A, on établit quelques résultats préliminaires qui pourront être utilisés dans les trois parties suivantes. les trois parties B,C,D sont indépendantes.

Les parties B et C calculent de deux façons différentes la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ introduite au A

La partie D détermine un équivalent du reste de cette série.

Partie A.

1. Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$. Etudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. On note γ sa limite.
2. Pour x élément de $]0, +\infty[$, on considère l'application h_x de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par :

$$h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$

1. Déterminer le tableau de variation de h_x .
2. Déterminer la concavité de h_x
3. Justifier les inégalités : $\forall n \geq 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n \geq 4, \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln(t)}{t} dt$.
4. Prouver que la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

On pose : $S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

Les trois parties qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie B.

Pour $n \geq 3$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}, \quad t_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}, \quad a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

1. Utiliser les inégalités établies en question A.3 pour démontrer que :
 - la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante
 - La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ converge.
2. Montrer que $\forall n \geq 3, S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \ln(2)$. en déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n .
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$).
4. Déterminer S .

Partie C.

On note F l'application de $]1, +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour $n \geq 1$, on considère les applications v_n et w_n de $]1, +\infty[$ vers \mathbb{R} définies par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt$$

1.

1. Exprimer $v'_n(x)$ en fonction de $h_x(n)$ et $h_x(n+1)$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

2.

1. Pour $n \geq 1$, expliciter w_n et montrer que w_n est continue sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que $\forall x \geq 1, \forall n \geq 1, 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.
3. On considère la fonction W définie par $W = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Démontrer que W est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

3.

1. Montrer que $\forall x > 1, W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right)$ (on exprimera le résultat en fonction de γ).

4. Pour $n \geq 1$, on considère l'application ϕ_n de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par $\phi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et on pose $\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n$

1. Montrer que ϕ est définie sur $[1, +\infty[$.
2. Exprimer ϕ à l'aide de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_{2n}$. En déduire que ϕ est continue sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.
4. On admettra que, en s'inspirant du 4.2, on peut montrer que ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et que ϕ' s'y calcule par dérivation termes à termes.
Exprimer $\phi'(1)$ sous forme de somme d'une série.

5.

1. Etablir que : $\forall x > 1, \phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.
2. Déterminer un développement limité de $1 - 2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1^+ , puis un développement limité de $\phi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1^+ .
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et retrouver la valeur de S

partie D

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant:

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 1$
- (iii) la suite (u_n) décroît vers 0
- (iv) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$

1. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| + |R_{n+1}| = u_n \text{ et } |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1})$$

3. En déduire la monotonie de la suite $(|R_n|)$

4. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$$

En déduire que $|R_n| \sim_{+\infty} \frac{u_n}{2}$

5. Donner un équivalent si n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$