

1.

a) question de cours

b) $P(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f donc commute avec f .

2. a) question de cours

b) On redémontre (question de cours) que $H = \text{Ker}(\phi)$ est stable par f si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\phi \circ f = \mu f$. Soit matriciellement $LA = \mu A$. Soit en transposant ${}^t A^t L = \mu {}^t L$.

Or ${}^t L \neq (0)$ donc la proposition équivaut à ${}^t L$ est vecteur propre de ${}^t A$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Pour trouver les droites stables on cherche les vecteurs propres de B :

La résolution du système $BX = \lambda X$ donne :

- si $\lambda = 1$: $X \in E_1(B) = \text{Vect}(e_1)$
- si $\lambda = 2$: $X \in E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$
- si $\lambda \notin \{1, 2\}$ $x = \vec{0}$: absurde

les droites stables sont donc $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

• pour trouver les plans stables on recherche les vecteurs propres de ${}^t B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On trouve $E_1({}^t B) = \text{Vect}(e_2 - e_3)$, $E_2({}^t B) = \text{Vect}(e_3)$

les plans stables sont les plans d'équation $y = z$ et $z = 0$, soit les plans $\text{Vect}(e_1, e_2 + e_3)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

g admet 6 sous espaces vectoriels stables :

- $\{\vec{0}\}$
- $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$
- $\text{Vect}(e_1, e_1 + e_2 + e_3)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2)$
- E

3. Soit $x \in \sum_{k=1}^p F_k$, il existe des $(x_k)_{k \in [1, p]} \in \prod_{k=1}^p F_k$,

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^p x_k\right) = \sum_{k=1}^p f(x_k) \in \sum_{k=1}^p F_k, \text{ car } f \text{ est linéaire}$$

puisque $f(x_k) \in F_k$.

$\sum_{k=1}^p F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f .

4. a) Soit F stable par f et $x \in F$,

$$(f - \lambda Id)(x) = f(x) - x \in F$$

comme somme de deux vecteurs du sous espace vectoriel F : F est stable par $f - \lambda Id$.

Réciproquement si F est stable par $f - \lambda Id$, d'après le premier sens, F est stable par $(f - \lambda Id) - (-\lambda)Id = f$.

f et $(f - \lambda Id)$ ont les même sous espaces stables

b) Si F est stable par f , alors $f^2(F) = f(f(F)) \subset f(F) \subset F$, F est stable par f^2 .

La réciproque est fautive comme le montre la rotation de $\frac{\pi}{2}$.

tout sous espace stable par f est stable par f^2

Remarque le résultat se généralise à toute puissance positive de f , ou même à tout polynôme de l'endomorphisme f .

c) Puisque f^{-1} existe, f est bijective

Soit F un sous-espace stable par f , on a $f(F) \subset F$. Comme f est bijective on a $\dim(f(F)) = \dim(F)$. Donc $f(F) = F$. On a donc $f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = F$ et F est stable par f^{-1} .

Réciproquement comme $f = (f^{-1})^{-1}$ tout sous espace stable par f^{-1} est stable par f .

f et f^{-1} ont les mêmes sous-espaces stables

d) Soit f un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E . f laisse stable toutes les droites vectorielles $\text{Vect}(e_i)$, c'est à dire que $\forall i \in [1, n]$, e_i est vecteur propre associé à $f : \exists \mu_i$, $f(e_i) = \mu_i e_i$

Soit $(i, j) \in [1, n]^2$ tels que $i \neq j$, la droite $\text{Vect}(e_i + e_j)$ est stable, donc, $e_i + e_j$ est propre et pour un certain réel μ , $f(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j)$. On a donc,

$$\mu(e_i + e_j) = f(e_i + e_j) = f(e_i) + f(e_j) = \mu_i e_i + \mu_j e_j.$$

Puisque (e_i, e_j) est libre, $\mu = \mu_i = \mu_j$ dès que $i \neq j$, nécessairement les μ_i sont égaux:

$$f = \mu Id.$$

Réciproquement, il est évident que si $f = \mu Id$, elle laisse tous les sous-espaces stables.

$f \in (E)$ laissant stable tout sous-espace de E est de la forme $f = \lambda Id_E$, f est une homothétie (de rapport nul ou non nul)

e) La rotation R d'angle $\frac{\pi}{2}$, décrite plus haut convient: elle n'a pas de sous-espaces stables de dimension 1, donc les seuls espaces $\{0\}$ et E de dimension 0 et 2 sont stables.

Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

1. **a)** analyse de la matrice A : on veut $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, \dots, f(e_n) = e_{n-1}$. Donc $e_{n-1} = f(e_n), e_{n-2} = f^2(e_n) \dots, e_1 = f^{(n-1)}(e_n), f^{(n)}(e_n) = 0$. On cherche donc un vecteur e_n tel que $f^{(n)}(e_n) = 0$ et $f^{(n-1)}(e_n) \neq 0$

vérification Soit $e_n \in E$ tel que $f^{(n-1)}(e_n) \neq 0$; puisque $f^{(n-1)} \neq 0$, il existe un tel vecteur.

Vérifions que la famille $(f^k(e_n))_{k \in [0, n-1]}$ est une base solution:

- elle a le bon cardinal
- elle est libre :

Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k f^k(e_n) = 0$. Soit l le plus petit entier tel que $\mu_l \neq 0$, on a donc $\sum_{k=l}^{n-1} \mu_k f^k(e_n) = 0$, en composant par f^{n-l-1} , on obtient

$$f^{n-l-1} \left(\sum_{k=l}^{n-1} \mu_k f^k(e_n) \right) = \sum_{k=l}^{n-1} \mu_k f^{k+(n-l-1)}(e_n) = \mu_l f^{n-1}(e_n) + \sum_{k=l+1}^{n-1} 0 = \mu_l f^{n-1}(e_n)$$

ce qui est absurde: tous les coefficients μ_i sont nuls, la famille est bien libre.

- La matrice de f dans la base $(f^{(n-1)}(e_n), f^{(n-2)}(e_n), \dots, f(e_n), e_n)$ est bien A .

2. **a)** vérification évidente.

b) Il est évident que les sous-espaces $R_k[X]$ sont stables par D , montrons que ce sont les seuls.

Réciproquement soit F un sous-espace non réduit à 0 et stable par D ,

F contient un polynôme non nul, et tout polynôme de F est de degré $\leq n$. Il existe donc un polynôme P de degré maximum notée k .

- On a $F \subset \mathbb{R}_k[X]$.
- On a $\mathbb{R}_k[X] \subset F$: F étant stable, $D(P) = P', D^2(P) = P'', \dots, D^k(P) = P^{(k)}$ sont dans F , or c'est une famille de polynômes étagés en degré. $\mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(D^{(i)}(P)) \subset F$.

Les seuls sous espaces stables par D sont $\{0\}$ et les $\mathbb{R}_k[X]$

c) on vérifie que $D(P_0) = 0$ et pour $k \in [[1, n-1]]$, $D(P_k) = P_{k-1}$: La matrice de D dans la base P_k est la matrice A .

3. On peut utiliser deux fois l'isomorphisme entre endomorphisme et matrice carré: Soit θ l'application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans E défini sur la base $(e_i)_{i=1}^n$ par $\theta(e_i) = P_{i-1}$.

θ est un isomorphisme car l'image d'une base est une base.

De plus si $y = f(x)$ alors $\theta(y) = D(\theta(x))$:

si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors

$$y = f(x) = \sum_{i=2}^{n-1} x_i e_{i-1}, \theta(x) = \sum_{i=1}^n x_i P_{i-1}, D(\theta(x)) = \sum_{i=2}^n x_i P_{i-2} = \theta(y)$$

On a donc que F est un sous espace stable par f si et seulement si $\theta(f)$ est stable par D .

Ce sont donc l'ensemble des sous espaces stables par f est :

$$\boxed{\{\text{Vect}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)\}_{i=0}^{n-1} \cup \{\vec{0}\}}$$