

CALCUL MATRICIEL

1. STRUCTURE:

1.1. Définition

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est une application de $\{1..n\} \times \{1..p\}$ dans \mathbb{K} : $(i, j) \rightarrow m_{i,j}$.

On la représente sous forme d'un tableau de n lignes et p colonnes

$m_{i,j}$ figurant à l'intersection de la ligne i et de colonne j

On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. et $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$. Un élément de $M_n(\mathbb{K})$ est dit matrice carrée.

1.2. Vocabulaire

Une matrice colonne a une seule colonne $M \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Une matrice ligne a une seule ligne: $M \in M_{1,p}(\mathbb{K})$

Une matrice carrée M est

diagonale si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0$

triangulaire supérieure si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i > j \Rightarrow m_{i,j} = 0$

triangulaire inférieure si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i < j \Rightarrow m_{i,j} = 0$

symétrique si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} = m_{j,i}$

antisymétrique si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} = -m_{j,i}$ (on a donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}, m_{i,i} = 0$)

1.3. Règles de calculs:

Produit externe: $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall M \in M_{n,p}(\mathbb{K}) N = \lambda M \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\} n_{i,j} = \lambda m_{i,j}$

Addition: $\forall (M, N) \in M_{n,p}(\mathbb{K})^2 S = M + N \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1 \dots p\} s_{i,j} = m_{i,j} + n_{i,j}$

Structure: Muni de ces deux lois $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np . Une base est constituée des matrices ayant un coefficient égal à 1 et tous les autres nuls. La matrice ayant un seul 1 ligne i colonne j est en général notée $E_{i,j}$

Produit interne $\forall M \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall N \in M_{p,q}(\mathbb{K}), P = MN \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1 \dots n\} \times \{1 \dots q\} p_{i,j} = \sum_{k=1}^p m_{i,k} n_{k,j}$

structure: Muni de l'addition et de la multiplication interne $M_n(\mathbb{K})$ est un anneau .

de plus $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall N \in M_{p,q}(\mathbb{K}) : \lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$

DANGER: la multiplication n'est pas commutative: en général $MN \neq NM$. Il faut par exemple être prudent avant d'écrire le binôme de Newton:

théorème: Soient M et N deux matrices telles que $MN = NM$ alors pour tout entier n :

$$(M + N)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k M^k N^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k M^{n-k} N^k$$

groupe linéaire : L'ensemble des matrices inversibles se note $GL_n(K)$.

1.4. Transposition

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la transposée de M est la matrice N de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1 \dots p\} m_{i,j} = n_{j,i}.$$

La transposée se note ${}^t M$.

La transposition est un isomorphisme involutif d'espace vectoriel et ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M$.

Une matrice est symétrique (antisymétrique) si et seulement si $M = {}^t M$ ($- {}^t M$)

2. MATRICE ET OUTIL DE REPRESENTATION :

2.1. Matrice d'un vecteur:

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (b_i)_{i=1}^n$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ est un vecteur de E la matrice de x est le vecteur colonne des coordonnées de x : $M = Mat_B(x) \Leftrightarrow M \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $m_{i,1} = x_i$

2.2. Matrice d'un système de vecteurs

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (b_i)_{i=1}^n$. $X = (x_j)_{j=1}^p$ une famille de vecteurs. La matrice de X dans B ($Mat_B(X)$) est la matrice $n \times p$ dont les colonnes représentent les coordonnées de x_j dans B :

Si $M = Mat_B(X)$ $x_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} b_i$

2.3. Rang

Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.

Le rang est conservé par multiplication par une matrice inversible.

Une matrice $n \times n$ est inversible si et seulement si son rang est n .

Le rang d'une matrice est égale à celui de sa transposée.

Le rang peut se calculer par Pivot de Gauss sur les lignes (et ou les colonnes)

toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r se décompose sous la forme $M = P J_r Q$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant r coefficients égaux à 1 sur la "diagonale" et des 0 ailleurs:

$$J_r = (j_{k,l}), \begin{cases} j_{k,l} = 1 \text{ si } 1 \leq k = l \leq r \\ j_{k,l} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2.4. Cas d'une base

Si C est une base de E $M = Mat_B(C)$ est la matrice de passage de B à C . (matrice de changement de base)

Formules: $Mat_B(C) = Mat_{C,B}(Id)$

$$Mat_B(v) = Mat_B(C) Mat_C(v)$$

$$Mat_B(X) = Mat_B(C) Mat_C(X)$$

$$Mat_B(C) \text{ est inversible et l'inverse est } Mat_C(B)$$

2.5. Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels de dimensions p et n munis des bases respectives $B = (b_j)_{j=1}^p$ et $C = (c_i)_{i=1}^n$. La matrice de f dans ces bases est la matrice $M = Mat_{B,C}(f) = (m_{i,j})$ telle que la colonne j représente les coordonnées de $f(b_j)$ dans (c_i) .

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} c_i.$$

Théorème: L'application qui à f associe $Mat_{B,C}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

La matrice du composée est le produit des matrices.

formule: Soient E et F deux E.V. munis de bases respectives B et C : si $x \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

$$Mat_C(f(x)) = Mat_{B,C}(f) Mat_B(x)$$

Dans le cas d'un endomorphisme $Mat_{B,B}(f)$ se note $Mat_B(f)$

2.6. Noyau et image d'une matrice:

Ils sont définis par analogie avec l'application linéaire associée de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n munis de leurs bases canoniques:

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), MX = 0\}$$

$$\text{Im}(M) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), MX = Y\}$$

Le noyau et l'image se déterminent par Pivot de Gauss sur la matrice.

3. SYSTEME LINEAIRE:

3.1. Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On appelle système linéaire l'équation d'inconnue $x (\in E)$ $f(x) = b$. Le rang du système est celui de f

3.2. Forme matricielle

Si $M = Mat(f)$ $B = Mat(b)$ $X = Mat(x)$ le système devient $MX = B$. Le rang du système est celui de M

3.3. Notation explicite

$$\forall i \in \{1 \dots n\} \sum_{j=1}^p m_{i,j} x_j = b_i$$

3.4. Système de Cramer

Un système est dit de Cramer si et seulement si M est inversible. Son rang est donc $p = n$.

Il existe alors une solution unique $M^{-1}B$

3.5. Système homogène

Un système est homogène si et seulement si $B = 0$.

L'ensemble des solutions est alors un espace vectoriel de dimension $p - \text{rg}(M)$

3.6. Cas général

Si un système linéaire $f(x) = b$ admet une solution x_0 alors l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène $f(x) = \vec{0}$ (l'ensemble des vecteurs $x = x_0 + y$, y décrivant l'espace vectoriel des solutions de $f(y) = \vec{0}$)

3.7. Additivité des solutions :

Si les deux systèmes $f(x) = b_1$ et $f(x) = b_2$ admettent des solutions. Toute solution du système $f(x) = b_1 + b_2$ est obtenue par addition d'une solution de $f(x) = b_1$ et de $f(x) = b_2$.

attention : le système $f(x) = b_1 + b_2$ peut avoir des solutions alors que les systèmes $f(x) = b_1$ et $f(x) = b_2$ sont impossibles.

3.8. Calcul pratique:

Pour résoudre on utilise un pivot de Gauss sur les lignes. En effet les opérations élémentaires du pivot de Gauss permettent de transformer le système initial en un système "trapézoïdal" équivalent et facile à résoudre:

A l'ordre des variables près tout système linéaire est équivalent à un système

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 + \dots + m_{1,p}x_p + m_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + m_{1,n}x_n = a_1 \\ m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 + \dots + m_{2,p}x_p + m_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + m_{2,n}x_n = a_2 \\ \vdots \\ m_{q,q}x_q + \dots + m_{q,p}x_p + m_{q,p+1}x_{p+1} + \dots + m_{q,n}x_n = a_q \\ 0 = a_{q+1} \\ \vdots \\ 0 = a_n \end{array} \right\} \text{ avec } \forall i, m_{i,i} \neq 0$$

Le système est alors compatible si et seulement si $a_{q+1} = \dots = a_n = 0$.

On peut alors résoudre le système en exprimant $x_1 \dots x_q$ (les inconnues principales) en fonction de $(x_{q+1} \dots x_p)$ les inconnues secondaires (ou inconnues paramètres) et des $(a_j)_{j=1}^p$

Pour les systèmes 2×2 ou 3×3 l'utilisation de déterminant permet de savoir si le système est de Cramer et de le résoudre dans ce cas. Si le système n'est pas de Cramer il faut revenir à un pivot de Gauss sur les lignes.

3.9. Calcul de l'inverse d'une matrice:

Pour calculer l'inverse d'une matrice on utilise la relation $MX = Y \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$. On prend deux matrices colonnes $X = (x_i)$ et $Y = (y_j)$, on pose le système linéaire $MX = Y$ et on le résout. On en déduit M^{-1} .

4. MATRICE PAR BLOC:

4.1. notation:

Pour noter une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on peut utiliser une présentation en explicitant, non pas les coefficients de M , mais des sous-matrices particulières de M .

Par exemple ma matrice $M = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ désigne une matrice $2n \times 2n$ telle que $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4.2. cas particuliers:

Une matrice est diagonale par bloc si et seulement si les sous-matrices situées en dehors de la diagonale sont toutes nulles et si les blocs diagonaux sont carrés.

Une matrice est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) par bloc si et seulement si tous les blocs strictement en dessous (resp au dessus) de la diagonale sont nuls et si les blocs diagonaux sont carrés.

4.3. calcul par bloc:

On admet que les formules de calculs sur les matrices par blocs sont -sous réserve que la taille des blocs soit compatible- les mêmes que pour les matrices définies par leur coefficients. Dans l'exemple ci dessus $M^2 = 0_{2n}$.

4.4. rang:

Si M est diagonale par bloc alors le rang de M est la somme des rangs des blocs diagonaux.

Sous réserve que les matrices blocs soient de même taille on peut échanger des lignes (des colonnes) par blocs sans changer le rang. On peut aussi ajouter à un bloc une combinaison linéaire des autres.

4.5. matrice par bloc et sous espace stable:

Théorème: Supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ et que F est stable par u . Donnons nous une base (e_1, \dots, e_p) de F que l'on complète en une base $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . La matrice de u relativement à cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ (0) & D \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée d'ordre p et égale à la matrice de $u|_F$ relativement à la base (e_1, \dots, e_p) de F . Réciproquement toute matrice carrée du type précédent est la matrice d'un endomorphisme pour lequel l'espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs de base est stable.

Théorème: Si $E = \bigoplus_{j=1}^r E_j$ et u est un endomorphisme de E pour lesquels les E_j sont stables, la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & (0) & \dots & \dots & (0) \\ (0) & A_2 & (0) & \dots & (0) \\ (0) & (0) & A_3 & \dots & (0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & (0) \\ (0) & \dots & \dots & (0) & A_r \end{pmatrix}$$

et réciproquement. Et si on appelle u_j l'endomorphisme induit par u sur E_j , $A_j = \text{mat}_{\mathcal{B}_j}(u_j)$ où \mathcal{B}_j est la base de E_j qui correspond à la base de E adaptée à la décomposition.

5. MATRICES SEMBLABLES:

5.1. changement de base:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose E muni de deux bases B_1 et B_2 Alors:

$$\text{Mat}_{B_2}(f) = \text{Mat}_{B_2}(B_1) \text{Mat}_{B_1}(f) \text{Mat}_{B_1}(B_2)$$

5.2. vocabulaire:

Deux matrices M et N sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

5.3. propriété:

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices carrés.

deux matrices semblables ont même rang (...et même trace, même déterminant, mêmes valeurs propres) mais il n'existe aucune réciproque.

5.4. critère:

M et N sont semblables si et seulement si il existe une matrice carrée inversible P telle que

$$M = PNP^{-1}$$

5.5. pratique:

Pour montrer que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on se place dans \mathbb{K}^n muni de sa base canonique $(e_i)_{i=1}^n$ on prend f l'endomorphisme de matrice M et on cherche à déterminer une base telle que la matrice de f dans cette base soit $N.P$ est alors la matrice de changement de base. On choisit en général pour N la plus simple des deux matrices (diagonale, triangulaire, à défaut celle ayant le plus de zéros)

6. TRACE:

6.1. trace d'une matrice:

La trace d'une matrice carrée est la somme des termes diagonaux:

$$\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$$

6.2. propriétés:

- la trace est une forme linéaire non nulle: $\text{Tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$
- $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$

6.3. trace d'un endomorphisme:

Théorème: la trace de la matrice d'un endomorphisme est indépendante de la base de calcul.

définition: Cette quantité est appelée trace de l'endomorphisme .

propriété: c'est une forme linéaire telle que $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$

projecteur: Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.