

CCP PSI 2007 math 2

1.1 On a

$$a_{1,1} = \binom{p}{p} = 1, \quad a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p}, \quad a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n-p} = 1, \quad a_{1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}$$

1.2 On a $d_n = \det(1) = 1, d_{n-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} = 1,$

$$d_{n-2} = \det \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 2 & 2n+1 \end{pmatrix} \text{ en retranchant } L_1 \text{ au deux autres lignes}$$

$$= 1$$

$d_n = d_{n-1} = d_{n-2} = 1$

1.3.1 On sait que $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

La nouvelle ligne a donc les coefficients : $\begin{cases} a'_{i,1} = 1 - 1 = 0 \\ a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i-1,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1} - \binom{p+i+j-3}{p+i-2} = \binom{p+i+j-3}{p+i-1} \end{cases}$

en prenant : $\begin{cases} n = p+i+j-3 \\ p = p+i-2 \end{cases}$

1.3.2 Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p) = \det(A'_p)$.

Mais d'après le calcul précédent : $A'_p = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & D \end{pmatrix}$

avec $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $d_{i,j} = a'_{i+1,j+1} = \binom{p+i+j-1}{p+i} = \binom{(p+1)+i+j-2}{(p+1)+i-1}$. C'est donc le coefficient ligne i colonne j de A_{p+1}

$$A'_p = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & A_{p+1} \end{pmatrix}$$

donc $\det(A_p) = \det(A'_p) = \det(A_{p+1})$

$$d_p = d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que

$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, d_p = d_n = 1$

2.1 On a : $D_0 = \det(1) = 1, D_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 = 1, \Delta_0 = \det(1) = 1 = 1, \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1,$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 24 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 1$$

2.2 Comme $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\frac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\frac{1}{j!}$. Le déterminant étant n-linéaire, on a alors

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^2 D_n$$

2.3 On a en reprenant une numérotation des lignes/colonnes entre 1 et $n+1$:

$$\Delta_n = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} = \left(\binom{i'+j'-2}{i'-1} \right)_{1 \leq i', j' \leq n+1} = d_0 = 1$$

et donc

$$D_n = \prod_{k=0}^n (k!)^2$$

1. Quelques calculs préliminaires.

1. On a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}, (A + I_3)^2 = 9 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

- Dans $A + I_3$ les colonnes 2 et 3 sont opposés et la colonne 1 n'est pas proportionnelle à ces colonnes : $A + I_3$ est de rang 2.
- $(A + I_3)^2$ est de rang 1., $A - 2I_3$ est de rang 2

2. En utilisant le théorème du rang on en déduit que $\dim(\text{Ker}\{(A + I_3)^2\}) = 2$ et $\dim(\text{Ker}\{A - 2I_3\}) = 1$. Pour montrer que $\text{ker}((A + I_3)^2)$ et $\text{ker}(A - 2I_3)$ sont supplémentaires dans \mathbb{C}^3 , il suffit de montrer que l'intersection est réduite à $\{0\}$..
 $V \in \text{Ker}(A + I_3)^2 \cap \text{Ker}\{A - 2I_3\} \Rightarrow (A + I_3)^2 V = 0$ et $AV = 2V$. Or $(A + I_3)^2 = A^2 + 2A + I_3$ (binôme de Newton comme les matrices commutent).

Or $AV = 2V \Rightarrow (A + I_3)^2 V = (A^2 + 2A + I_3) V = A^2V + 2AV + V = 4V + 4V + V = 9V$ et donc $9V = 0$ et donc $V = 0$

$$\boxed{\text{ker}((A + I_3)^2) \oplus \text{ker}(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3}$$

3. On pose f tel que $\text{Mat}_{(i,jk)}(f) = A$ et on cherche une base (I, J, K) telle que $\text{Mat}_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- On veut $f(I) = -I$, donc $I \in \text{Ker}(f - Id)$ ce qui donne le système $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \end{cases}, \exists z \in \mathbb{C} I = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix}$

- On veut $f(J) + J = I$ ce qui donne le système $\begin{cases} 3x' - 3y' + 3z' = 0 \\ -3x' + 4y' - 4z' = z \\ -3x' + 4y' - 4z' = z \end{cases}$, on prend z et z' comme paramètres :

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = z' + z \end{cases}$$

On peut prendre $I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- la relation $f(K) = 2K$ donne comme solution possible $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

les deux matrices sont semblables et une matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de déterminant -1

2. Quelques propriétés de la matrice J .

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Les $n - 1$ premières colonnes de J sont indépendantes, et la dernière est nulle Le rang de J vaut donc $n - 1$.

2.1. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et (u_1, \dots, u_n) la base canonique de \mathbb{C}^n . On a alors

$$\forall j \in [1..n-1], j(e_j) = e_{j+1} \text{ et } j(e_n) = 0$$

On en déduit alors, par récurrence sur $k \in [1..n-1]$,

$$\forall l \in [1, n-k], j^k(e_l) = e_{l+k} \text{ et } \forall l \in [n-k+1, n], j^k(e_l) = 0$$

- Initialisation : par définition de J et de j le résultat est vrai aux ordres 0 et 1 .
- Hérédité : si à l'ordre k : $\forall l \in [1, n-k], j^k(e_l) = e_{l+k}$ et $\forall l \in [n-k+1, n], j^k(e_l) = 0$ alors

$$\begin{cases} \forall l \in [1, n-k-1], j^{k+1}(e_l) = j(e_{l+k}) = e_{l+k+1} \\ \text{si } l = n-k, j^k(e_{n-k}) = j(e_n) = 0 \\ \forall l \in [n-k+1, n], j^{k+1}(e_l) = j(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut

aussi écrire que

$$\boxed{\forall i, j \in [1..n], (J^k)_{i,j} = \delta_{j+k,i}}$$

On remarque que c'est encore valable si $k=0$ (on obtient alors la matrice I_n).

On a aussi $j^n(e_l) = 0$ pour tout l et donc $J^n = 0$ et donc (on continue à multiplier par J et on obtient toujours la matrice nulle) :

$$\boxed{\forall k \geq n, J^k = 0_n}$$

2.2. $(J^k)^n = (J^n)^k = 0$ car $nk \geq n$. J^k est donc nilpotente.

3. Dans la somme définissant $\alpha(J)$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :

$$\alpha(J) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_{i,j}) \text{ avec } \alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j-1 \\ \frac{1}{(i-j)!} & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

$U = \alpha(J) - I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.

4.

- Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p = B^q = 0$. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}$$

Si $k \geq p$, $A^k = A^p A^{k-p} = 0$ et si $k \leq p$ alors $p+q-k \geq q$ et $B^{p+q-k} = 0$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q} = 0$.

- Il est évident que si $A^p = 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $(\alpha A)^p = 0$
- On conclut par récurrence sur le nombre p de termes de la combinaison linéaire :

– Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $p = 2$

– Hérédité : On suppose que pour p matrices nilpotentes A_i qui commutent et p scalaires α_i ; $\sum_{i=1}^p \alpha_i A_i$ est nilpotente.

Soit alors $p + 1$ matrices nilpotentes B_i qui commutent et $p + 1$ scalaires b_i ; on écrit :

$$\sum_{i=1}^{p+1} b_i B_i = \left(\sum_{i=1}^p b_i B_i \right) + (b_{p+1} B_{p+1})$$

la première matrice est nilpotente d'après l'hypothèse de récurrence , la seconde d'après la remarque précédente , et les deux matrice commutent car B_{p+1} commute avec chaque B_i pour $i \leq p$. Donc d'après l'étude de la somme

$$\sum_{i=1}^{p+1} b_i B_i \text{ est nilpotente.}$$

5. :On a

$$U = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} J^k$$

qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, U est nilpotente.

Les $n - 1$ premières colonnes de U sont indépendantes (matrice "pseudo triangulaire") dans la base canonique de \mathbb{C}^n et la dernière est nulle . U est donc de rang $n - 1$.

3. Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in E, u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$

Donc si $x \in \ker(u^i)$, $u^i(x) = 0$ puis $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ (u est linéaire) ce qui prouve l'inclusion :

$$\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$$

2. En particulier, la suite $(\ker(u^m))_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et, en passant aux dimensions , la suite $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante dans \mathbb{N} , si r n'existe pas on a pour tout m $t_m < t_{m+1}$ et donc comme on est dans \mathbb{N} : $t_{m+1} \geq t_m + 1$. On a donc $t_m \geq t_0 + m$ qui tend vers $+\infty$. Absurde car la suite est majoré par $n = \dim(E)$.

$$\text{il existe } r = \min\{m \in \mathbb{N} / t_m = t_{m+1}\}$$

3.

- Par définition de r , si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. Or $\ker(u^m) \subset \ker(u_{m+1})$, les sous-espaces n'ayant pas même dimension $\ker(u^m) \subsetneq \ker(u_{m+1})$
- r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Or $\ker(u^r) \subset \ker(u_{r+1})$, comme on a égalité des dimensions, on a $\ker(u^r) = \ker(u_{r+1})$. Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation

$$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$$

est vraie pour tout $m \geq r$.

– Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.

– Hérédité : soit $m \geq r$ tel que $\ker(u^m) = \ker(u_{m+1})$.

Soit $x \in \ker(u^{m+2})$; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(u^{m+1})$. Par hypothèse de récurrence, $\ker(u^m) = \ker(u_{m+1})$ et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in \ker(u^{m+1})$. On a prouvé que $\ker(u^{m+2}) \subset \ker(u_{m+1})$ et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m + 1$.

4. Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$.

1.1. On a

$$\text{Im}(w) = v^q(\text{Im}(v^p)) = \text{Im}(v^{p+q})$$

1.2. $w(x) = 0$ équivaut $x \in \text{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire $x \in \text{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc

$$\ker(w) = \text{Im}(v^p) \cap \ker(v^q) \subset \ker(v^q)$$

1.3. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(w)) + \dim(\ker(w)) = \dim(\text{Im}(v^p))$$

En utilisant les deux questions précédentes, on a donc

$$\dim(\text{Im}(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q)) + \dim(\text{Im}(v^{p+q}))$$

Le théorème du rang donne aussi

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(v^p)) &= \dim(E) - \dim(\ker(v^p)) \\ \dim(\text{Im}(v^{p+q})) &= \dim(E) - \dim(\ker(v^{p+q})) \end{aligned}$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(v^{p+q})) &= n - \dim(\text{Im}(v^{p+q})) \\ &\leq n - (\dim(\text{Im}(v^p)) - \dim(\ker(v^q))) \\ &= \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q)) \end{aligned}$$

1.4. On prouve le résultat demandé par récurrence sur i .

- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n - 1$ et donc $\dim(\ker(v)) = 1 \leq 1$
- Hérédité : soit $i \in [1..n - 1]$ tel que $\dim(\text{Ker}(v^i)) \leq i$. La question précédente avec $q = 1$ donne :

$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq \dim(\ker(v^i)) + \dim(\ker(v))$$

Comme $\dim(\ker(v)) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(v^i)) \leq i$, on a :

$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq i + 1$$

ce qui prouve le résultat au rang $i + 1$.

1.5. Par hypothèse $v^n = 0$ et $\dim(\ker(v^n)) = n$.

Si par l'absurde on suppose qu'il existe un $j \leq n$ tel que $\dim(\text{Ker}(v^j)) \leq j$, alors la récurrence précédente donne pour $i \geq j$: $\dim(\text{Ker}(v^i)) < i$, ce qui est absurde pour $i = n$.

$$\forall i \in [1..n], \dim(\ker(v^i)) = i$$

2. Comme $\ker(v^{n-1})$ est de dimension $n - 1$, il n'est pas égal à E et $v \neq \theta$.

3. Il existe donc $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose par l'absurde que

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i v^i(e) = 0 \text{ avec } (\alpha_i) \neq (0)$$

La famille étant non nul il existe un plus petit indice p tel que $\alpha_p \neq 0$: $\sum_{i=p}^n \alpha_i v^i(e) = 0$. On compose par v^{n-p-1} . Tous

les termes sont nuls sauf le premier ($n + p - 1 + i \geq n \Rightarrow v^{n+p-1+i} = \theta$) Il reste $\alpha_p v^{n-1}(e) = 0$, absurde car les deux facteurs sont non nuls.

La famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments :

la famille est une base de E

4. La matrice de v dans cette base est tout simplement J .

5. Si N est nilpotente de rang $n - 1$, alors si $N = \text{Mat}_B(f)$, f est nilpotente de rang $n - 1$ et donc dans une base bien choisie $\text{Mat}(f) = J$. donc N et J sont semblables.

Par transitivité si M et N sont nilpotentes de rang $n - 1$, M et N sont semblables à J , donc sont toutes les 2 semblables.