DETERMINANT

Dans tout ce chapitre E est un espace vectoriel de dimension n strictement positif sur $\mathbb{K}$

1. DETERMINANT D'UN SYSTEME DE VECTEURS

1.1. définition

une forme n-linéaire est une application de E^n dans $\mathbb{K}$ linéaire pour chaque vecteur:

$\forall i \in [1 \cdots n] \quad f(x_1, .., x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, ..x_n) = \lambda f(x_1, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..x_n) + \mu f(x_1, .., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..x_n)$

une forme n-linéaire est alternée si et seulement l'une des trois propositions équivalentes est vérifiée (admis):

- si le système (x_i) est lié $f(x_1, ..x_n) = 0$.
- si deux vecteurs sont égaux alors f est nulle.
- si on permute deux vecteurs f change de signe.

1.2. structure (admise)

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 .

1.3. déterminant

Soit B une base de E.Il existe une unique forme n-linéaire alternée vérifiant $f(B) = 1$.Cette forme est appelée déterminant. Il se note $\det_B(x_i)$, ou $\det(x_i)$ si B est évident.
C'est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E .

1.4. propriétés

- le déterminant est n-linéaire alterné
- toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle au déterminant.
- <u>changement de base</u>:soit B et C deux bases $\det_B(x_i) = \det_B(C) \det_C(x_i)$
- les $(x_i)_{i=1}^n$ forment une base si et seulement si $\det_B(x_i) \neq 0$
- Un système de n vecteurs est de rang n si et seulement si son déterminant est non nul.
- équation d'un hyperplan : Soit H un hyperplan de base $(V_i)_{i=1}^{n-1}$. Un vecteur W est dans H si et seulement si $\det(V_1, V_2, \cdots V_{n-1}, W) = 0$.

1.5. système linéaire de Cramer

Soit un système linéaire $n \times n$, exprimé sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = b$.
On appelle déterminant du système le déterminant des vecteurs $(v_i)_{i=1}^n$.
Un système linéaire $n \times n$ est de Cramer si et seulement si son déterminant est non nul.
Il admet alors une unique solution qui s'exprime par la formule:

$$\forall j \in [[1, n]] \ , \ x_j = \frac{\det(v_1, v_2, \dots v_{j-1}, b, v_{j+1} \dots, v_n)}{\det(v_1, v_2, \dots v_{j-1}, v_j, v_{j+1} \dots, v_n)}$$

1.6. orientation d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n > 0$.L'ensemble des bases de E peut être muni de la relation d'équivalence $B_1 \mathcal{R} B_2 \Leftrightarrow \det_{B_1}(B_2) > 0$.
Si B_1 et B_1' sont deux bases non équivalentes alors toute base est équivalente soit à B_1 soit à B_1'.
<u>orienter</u> E c'est choisir une base privilégiée B_1.
Une base sera <u>directe</u> si et seulement si elle est équivalente à B_1(son déterminant dans B_1 est strictement positif) .Sinon elle sera indirecte.
Un automorphisme sera dit <u>directe</u> si et seulement il transforme une base directe en base directe. Il sera indirect sinon.

2. DETERMINANT D'UNE MATRICE

Toutes les matrices sont dans $M_n(\mathbb{K})$

2.1. définition

Le déterminant d'une matrice est celui de ses vecteurs colonnes:$\det(M) = \det\limits_B(x_i)$ si $M = Mat_B(x_i)$.
Le déterminant se note aussi$\mid m_{i,j} \mid$

2.2. propriétés

- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$
- $\det(M) = 0 \Leftrightarrow rg(M) < n$
- M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$
- $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
- $\det({}^tM) = \det(M)$ (admis)
- le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes et aux lignes

3. DETERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

théorème:Si deux matrices sont semblables elles ont même déterminant.
définition: si f est un endomorphisme $\det(Mat_B(f))$ est indépendant de B.C'est le déterminant de f.
Les propriétés du déterminant d'un endomorphisme se déduisent de celle du déterminant de sa matrice.
En particulier:

- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
- f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$

On a de plus : Dans un espace vectoriel orienté un automorphisme est direct si et seulement si son déterminant dans une base directe est strictement positif.

4. CALCULS PRATIQUES

4.1. cas simples

- si$n = 2$ ou 3 , le cours de première année donne les formules développées de calcul. Elle ne se généralise pas à $n > 3$. En pratique il peut-ête plus rapide d'effectuer un Pivot de Gauss même pour calculer un déterminant 3×3 (c'est en particulier le cas quand on veut calculer une expression factorisée du déterminant) .
- si M est une matrice diagonale le déterminant de M est le produit des termes diagonaux
- si M est une matrice triangulaire le déterminant de M est le produit des termes diagonaux
- si M est une matrice triangulaire par bloc le déterminant de M est le produit des déterminants des blocs diagonaux (admis)

4.2. Pivot de Gauss

les opérations du pivot de Gauss permettent de se ramener à une forme triangulaire avec les règles:

- permuter deux colonnes change le signe du déterminant.
- multiplier une colonne par λ multiplie par λ le déterminant.
- ajouter à une colonne un multiple d'une autre (une combinaison linéaire des autres) ne change pas le déterminant.
- ajouter à toutes les colonnes sauf une L_i , un multiple de L_i ne change pas le déterminant
- de même en remplaçant colonne par ligne.

4.3. développement par rapport à une colonne ou une ligne (admis)

pour tout couple (i,j) soit $M_{i,j}$ la sous matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en retirant de M la ligne i et la colonne j alors:

$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ (développement par rapport à une colonne)

$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ (développement par rapport à une ligne)

vocabulaire:

- $(-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ est le cofacteur de $m_{i,j}$
- la matrice N définie par :$\forall\ (i,j) \in [[1,n]]\quad n_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ est la comatrice de M .

4.4. conséquences:

- Soit $a_{i,j}((t))$ n^2 fonctions polynômiales .Alors $D(t) = \det(a_{i,j}(t))$ est une fonction polynômiale .
- $M->\det(M)$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$
- Si $t \to M(t)$ est une fonction continue à valeur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $t \to \det(M(t))$ est continue à valeur dans $\mathbb{K}$
- Le résultat reste vrai pour des fonctions C^k sur un intervalle I .
- Idem pour les fonctions det de E^n dans $\mathbb{K}$ et de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$

4.5. Un grand classique:Van Der Monde

Soit $(x_i)_{i=1}^n$ n scalaires et $M = (m_{i,j})$ la matrice définie par $\forall i, \forall j, m_{i,j} = x_j^{i-1}$.Alors $\det(M) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$

5. RAPPELS DE PREMIERE ANNEE

5.1. géométrie plane

- Soit le plan muni d'une repère orthonormée directe (O,i,j), $|\det(u,v)|$ représente l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$ et $\overrightarrow{AD} = v$
- La distance d'un point M à la droite passant par A de vecteur directeur v est $\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, v\right)\right|}{\|v\|}$
- Dans un repère quelconque du plan , pour écrire que trois points A, B, C sont alignés il suffit d'écrire que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ ou encore que le déterminant 3×3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$
- Dans un repère quelconque du plan , si u est un vecteur non nul fixé et A un point fixé l'équation de la droite passant par A et de vecteur directeur u est: $\det(u, \overrightarrow{AM}) = 0$

5.2. géométrie dans l'espace

- Soit l'espace muni d'une base orthonormée directe (O,i,j,k),
  - $|\det(u,v,w)|$ représente le volume d'un parallélépipède construit sur les trois vecteurs u v et w.
  - La distance d'un point M au plan passant par A de vecteur directeur v et w est $\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, v, w\right)\right|}{\|v\wedge w\|}$
  - $\det(u,v,w) = \langle u\wedge v, w\rangle = \langle u, v\wedge w\rangle$
- Dans un repère quelconque de l'espace , pour écrire que quatre points A, B, C, D sont coplanaires il suffit d'écrire que $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$ expression qui peut se transformer en déterminant 4×4 donnant aux 4 points un rôle symétrique
- Dans un repère quelconque de l'espace , l'équation du plan passant par A de vecteurs directeurs (u,v) (formant un système libre) est $\det(u, v, \overrightarrow{AM}) = 0$