

INTEGRATION SUR UN SEGMENT

1. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT

Dans toute cette partie f est une fonction d'un segment $[a, b]$ dans un espace vectoriel normé de dimension finie F .
Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de F .

1.1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Soit $f \in C_{pm}^0([a, b], F)$. On décompose $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$

Chaque fonction f_i étant continue par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{K} y admet une intégrale.

On dira alors que f est intégrable sur le segment $[a, b]$ et on posera $\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^n \left(\int_{[a,b]} f_k \right) e_k$

On note aussi $\int_a^b f(t) dt$

1.2. Propriétés:

1. L'intégrale est linéaire de $C_{pm}^0([a, b], F)$ dans F .

2. Relation de Chasles : si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et $[b, c]$ alors f est continue par morceaux sur $[a, c]$ et

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$$

3. Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux égales sauf en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$

1.3. inégalité de la moyenne:(admis)

Si $f \in C_{pm}^0([a, b], F)$ alors $|f| \in C_{pm}^0([a, b], F)$ et $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} (\|f\|)$

$\frac{\int_{[a,b]} f}{b-a}$ est la valeur moyenne de f .

1.4. Notation : $\int_a^b f(t) dt$

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue par morceaux sur I On définit, pour $(a, b) \in I^2$, $\int_a^a f$, pour $a < b$

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f \text{ et, pour } b < a, \int_a^b f = - \int_{[b,a]} f$$

On note aussi $\int_a^b f(t) dt$

La linéarité est conservée.

La relation de Chasles devient : $\forall (a, b, c) \in I^3$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

1.5. Propriétés:

Soient f continue par morceaux sur un intervalle I , a un élément de I et $g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$:

- g est continue sur I .
- En tout point $x \in I$ où f est continue g est dérivable et $g'(x) = f(x)$.
- g est C_{pm}^1 sur I

2. PRIMITIVES

2.1. Définition

Soit f continue par morceaux sur I à valeurs dans F . On appelle primitive de f sur I toute fonction F continue et C^1 par morceaux sur I telle que, en tout point x de continuité de f , on ait $F'(x) = f(x)$.

2.2. Danger

Distinguez bien primitive et intégrale:

- une intégrale est un vecteur (ou un réel si $F = \mathbb{R}$), une primitive est une fonction.
- l'intégrale peut se calculer en regardant les variations d'une primitive.
- toute expression $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f , mais il existe des primitives qui ne sont pas de ce type:

$x^2 + 1$ est une primitive de $2x$
il n'existe pas a tel que $x^2 + 1 = \int_a^x 2t dt$

- par contre toute primitive peut s'écrire sous la forme $\int_{x_0}^x f(t)dt + C$ si x_0 est fixé dans I
- Une fonction définie par une intégrale peut ne pas être une primitive de façon évidente : $F(x) = \int_x^{2x} t dt$, ou
$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^2 + t^2}$$

2.3. propriétés :

Soit f continue par morceaux sur I .

- Si F et G sont deux primitives de f alors $F - G$ est une fonction constante (c'est faux si le domaine de calcul n'est pas un intervalle)
- Si a est un élément de I il existe une unique primitive de f nulle en a : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
- Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
- Pour toute application g continue sur I et C_{pm}^1 $\int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$

2.4. Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions continues C^1 par morceaux de $[a, b]$ dans F et G . Soit B bilinéaire de $F \times G$ dans H on a:

$$\int_a^b B(f'(t), g(t)) dt = (B(f(b), g(b)) - B(f(a), g(a))) - \int_a^b B(f(t), g'(t)) dt$$

On peut donc intégrer par partie les produits usuelles (scalaire, vectoriel ...)

2.5. Changement de variable

Soit $f : I \rightarrow F$ continue et $\varphi \in C^1([a, b], I)$. on a: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$

Généralisation:

Remarque préliminaire: On n'est pas assuré que $f \circ \varphi$ soit continue par morceaux si f l'est et que φ est C^1 .

Soit $f : I \rightarrow F$ continue par morceaux et $\varphi : [a, b] \rightarrow I$, strictement monotone et de classe C^1 alors $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$

2.6. Application linéaire :

Si $f \in C_{pm}^0([a, b], F)$ et $\phi \in L(F, G)$ alors $\phi \circ f \in C_{pm}^0([a, b], G)$ et $\int_{[a,b]} \phi \circ f = \phi \left(\int_{[a,b]} f \right)$

exemples : si f est continue par morceaux à valeurs complexes : $\int_{[a,b]} \overline{f} = \overline{\int_{[a,b]} f}$, $\operatorname{Re} \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f)$,

$$\operatorname{Im} \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f)$$

3. APPLICATION AU CALCUL DIFFERENTIEL

3.1. Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in C^0([a, b], F)$ de classe C^1 par morceaux sur $]a, b[$. On suppose en outre qu'il existe λ tel que $\|f'(x)\| \leq \lambda$ en tout point x où f est dérivable. On a alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b - a).$$

3.2. Formule de Taylor

Soit f de classe C^n sur I et $a \in I$. Soit $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

remarque : $T_n(x)$ est un polynôme si f est à valeurs réelles ou complexes, mais n'est pas un polynôme dans les autres cas.

3.2.1. Formule de Taylor avec reste intégrale:

Soit f de classe C^n sur I , de classe C^{n+1} par morceaux, et $a \in I$. Pour tout $x \in I$:

$$f(x) = T_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

3.2.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient f de classe C^n sur I , de classe C^{n+1} par morceaux telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I et $a \in I$.

Soit M_{n+1} tel que $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq M_{n+1}$ en tout point où $f^{(n+1)}$ est définie alors

$$\forall x \in I, \|f(x) - T_n(x)\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

3.2.3. Formule de Taylor-Young

Soit $f \in C^n(I, F)$ et $a \in I$. f admet un développement limité d'ordre n en a :

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n)$$