INTEGRALES IMPROPRES

Vous rencontrerez les deux expressions équivalentes "l'intégrale généralisée converge" et "intégrale impropre converge". Par contre l'expression "la fonction est intégrable" n'est pas équivalente aux précédentes

1. INTRODUCTION

1.1. définition sur $[a, b[$

On se donne une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $I = [a, b[$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) à valeurs réelles ou complexes .On peut étudier la primitive $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et regarder si cette quantité admet une limite finie quand x tend vers b^- .

- définition : Si cette limite existe on dit que $\underline{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_a^b f(t)dt \text{ converge}}$

  On dit aussi que f admet sur $[a, b[$ une intégrale impropre convergente.

- notation : on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)dt$ la limite quand x tend vers b^- de $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$

1.2. définition sur $]a, b]$

Soit f est continue par morceaux sur $]a, b]$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$)

- définition : Si $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ admet une limite si x tend vers a^+ on dit que $\underline{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_a^b f(t)dt \text{ converge}}$
- On dit aussi que f admet sur $]a, b]$ une intégrale impropre convergente.
- notation : on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{\to a}^b f(t)dt$ la limite quand x tend vers a^+ de $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$

1.3. définition sur $]a, b[$

Soit f est continue par morceaux sur $]a, b[$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$) , ($b \in \mathbb{R}, b > a$ ou $b = +\infty$)

- théorème : Soient c_1 et c_2 deux points de $]a, b[$ les intégrales $\displaystyle\int_a^{c_1} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{c_1}^b f(t)dt$ convergent si et seulement si $\displaystyle\int_a^{c_2} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{c_2}^b f(t)dt$ convergent
- définition : on dit alors que $\underline{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_a^b f(t)dt \text{ converge}}$
- On dit aussi que f admet sur $]a, b[$ une intégrale impropre convergente.
- notation : on note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{\to a}^{\to b} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (quantité qui est indépendante de $c \in]a, b[$)

1.4. divergence

Si f est continue par morceaux sur l'intervalle et si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne converge pas, on dit que cette intégrale impropre diverge.

1.5. notation

La notation usuelle est d'utiliser dans tous les cas $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ mais elle peut être dangereuse en pratique. Les théorèmes concernant les intégrales sur un segment ne s'appliquant - à priori - plus.

1.6. fonction intégrable:

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I y est intégrable si et seulement si l'intégrale de sa valeur absolue converge sur cette intervalle.

On dit de façon équivalente que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument.

1.7. généralisation

Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge on pose $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.
Si f est définie en a on pose $\int_a^a f(t)dt = 0$

1.8. propriétés

- structures:
  - L'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et telles que l'intégrale impropre de f converge sur $[a, b[$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et l'application $f \to \int_a^b f(t)dt$ est linéaire
  - le résultat est vrai aussi sur $]a, b]$ ou $]a, b[$.
  - Le produit de deux fonctions ayant une intégrale convergente n'a pas toujours une intégrale convergente.
- relation de Chasles :
  - Soit f continue par morceaux sur $[a, c]$ et sur $[c, b[$ si $\int_c^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et
  $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$
  - le résultat se généralise aux autres types d'intervalles.
- croissance:
  - Si f et g sont continues par morceaux , si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent avec $a < b$ et si $\forall x \in]a, b[$ $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
- changement de variable :
  - Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et ϕ une bijection C_1 de $[\alpha, \beta[$ sur $[a, b[$ (ou $]\alpha, \beta]$) alors l'intégrale $\int_\alpha^\beta f \circ \phi(t).\phi'(t)dt$ converge ssi $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_\alpha^\beta f \circ \phi(t).\phi'(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

1.9. et le reste :

pour tout le reste (intégration par partie , formule de Cauchy Schwarz ..) toujours revenir à une primitive puis passer à la limite après avoir justifier l'existence des limites.

2. CAS D'UNE FONCTION POSITIVE

Pour étudier la convergence d'une intégrale impropre on peut toujours se limiter à une étude sur $]a, b]$ et/ou sur $[a, b[$.

2.1. fonctions de référence

- pour tout réel x_0 , $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-at}dt$ converge si et seulement si $a > 0$
- pour tout réel $x_0 > 0$, $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ converge si et seulement si $a > 1$
- pour tout réel $x_0 > 0$, $\int_0^{x_0} \frac{1}{t^a}dt$ converge si et seulement si $a < 1$
- pour tout réel $x_0 \in]0, 1]$, $\int_0^{x_0} -\ln(t)dt$ converge (le résultat reste vrai pour tout $x_0 > 0$ mais la fonction n'est plus positive)
- on remarquera en particulier que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ diverge toujours.

2.2. méthodes pratiques sur $[a,b[$ ou $]b,a]$:

Par un changement de variable affine $u=-t$ on peut ramener l'étude sur $]-\infty,x_0]$ à l'étude sue $[-x_0,+\infty[$
Par un changement de variable affine $u=-t$ on peut ramener l'étude sur $[x_0,0[$ à l'étude sur $]0,-x_0]$
Par un changement de variable affine $u=a+t$ on peut ramener l'étude sur $]a,b]$ à l'étude sue $]0,b-a]$
Par un changement de variable affine $u=b-t$ on peut ramener l'étude sur $[a,b[$ à l'étude sur $]0,b-a]$

2.3. méthode de base pour prouver une convergence

2.3.1. majoration:

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux positives sur I et telles que $\forall x\in I\ \ 0\leq f(x)\leq g(x)$
Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge , $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

2.3.2. comparaison

Soient f et g continues par morceaux positives sur $[a,b[$ si $f=\mathcal{O}_{x\to b}(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge..
N'oubliez pas que si $f\sim g$ ou $f=o(g)$ alors $f=\mathcal{O}(g)$

2.3.3. cas particulier usuel en $+\infty$:

Si f est continue par morceaux positive sur $[a,+\infty[$ si $t^\alpha f(t)$ tend vers une limite finie $l\in\mathbb{R}$ quand t tend vers $+\infty$ et si $\alpha>1$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge
En pratique on prendra souvent $\alpha=2$.

2.4. méthodes pratiques dans le cas d'un intervalle ouvert :

Le cas d'une fonction continue par morceaux positives sur $]a,b[$ se fait en séparant les problèmes : On prend $c\in]a,b[$ et on fait l'étude sur $]a,c]$ puis sur $[c,b[$.

2.5. comparaison d'une série et d'une intégrale:

2.5.1. rappel:

Soit f une fonction continue par morceaux positive décroissante sur $[0,+\infty[$ .Alors la série de terme général $w_n=\displaystyle\int_{n-1}^n f(t)dt-f(n)$ est toujours convergente

2.5.2. conséquence :

Soit f une fonction continue par morceaux positive décroissante sur $[0,+\infty[$, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

3. CAS GENERAL

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ à valeurs réelles ou complexes.
les résultats se généralise à $]a,b]$ et $]a,b[$

3.1. convergence absolu:

definition : Soit f $\mathcal{C}^0_{pm}$ sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

3.2. cas des fonctions à valeurs réelles :

3.2.1. partie positive (négative) d'une fonction à valeurs réelles

On pose $f^+ = \max(f,0) = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \max(-f,0) = \dfrac{|f|-f}{2}$.
On a alors $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$
f^+ et f^- sont deux fonctions positives.
f est continue par morceaux si et seulement si f^+ et f^- sont continues par morceaux

3.2.2. théorème

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument alors $\displaystyle\int_a^b f^+(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f^-(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ convergent.
On a alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$

3.2.3. danger : la réciproque est fausse

exemple $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et ne converge pas absolument.

3.3. cas des fonctions à valeurs complexes :

$\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$ convergent et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt +$
$i\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
<u>CE N'EST PAS UNE EQUIVALENCE</u>

3.4. intégrabilité:

3.4.1. sur un segment

On dit que toute fonction continue par morceaux sur un segment $I = [a,b]$ y est intégrable et on note $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)dt$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

3.4.2. sur un intervalle non compact

les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- f admet sur I une intégrale impropre qui converge absolument
- il existe un réel M tel que pour tout segment $[u,v] \subset I$, $\displaystyle\int_u^v |f(t)|\, dt \leq M$

  On dit alors que f est intégrable sur I .

On note alors $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)dt$ l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

3.4.3. remarque

Pour une fonction positive (négative) sur I : f est intégrable sur I si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

3.4.4. DANGER

Une fonction peut ne pas être intégrable et avoir une intégrale impropre convergente : exemple $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

3.4.5. propriétés

- structure : L'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeur dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et l'intégrale est linéaire sur cet espace .
- relation de Chasles : Si f est intégrable sur deux intervalles I et J d'intersection réduite à un point alors f est intégrable sur l'union et : $\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$
- croissance : si f et g sont intégrables sur I et si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$
- changement de variables : Si f est intégrable sur un intervalle I et si ϕ est une bijection d'un intervalle J dans I alors

$$\int_I f = \int_J f\circ\phi.\left|\phi'\right|$$

- si on retire une borne à un intervalle l'intégrale ne change pas . Par exemple
  si f est intégrable sur $[a,b]$, f est intégrable sur $]a,b[$, $]a,b]$ et $[a,b[$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b[} f$$

4. NORMES DEFINIES PAR UNE INTEGRALE

4.1. norme N_1 :

sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ $N_1(f) = \int_I |f|$ est une norme .

4.2. convergence en moyenne quadratique N_2:

4.2.1. espace vectoriel

Une fonction continue à valeurs réelles ou complexes est dite de carré intégrable sur I si et seulement si $|f|^2$ est intégrable sur I .
L'ensemble E des fonctions continues de carré intégrable sur I est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

4.2.2. norme associée :

l'application $N_2(f) = \sqrt{\int_I |f|^2}$ est une norme sur E (provisoirement admis si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

dans le cas réel $< f,g >= \int_I fg$ est un produit scalaire sur E .

dans le cas complexe $< f,g >= \int_I \overline{f}g$ sera un produit scalaire sur E .

4.2.3. inégalités associés:

- Cauchy Schwartz : $\left|\int_I \overline{f}g\right| \leq \int_I |fg| \leq \sqrt{\int_I |f|^2}.\sqrt{\int_I |g|^2}$ ou encore $|< f,g >| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)N_2(g)$

5. SUITES et SERIES D'INTEGRALES (admis)

5.1. Convergence dominée:

Si (f_n) est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I qui converge simplement vers f, continue par morceaux sur I, et s'il existe φ, continue par morceaux sur I et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ (*Hypothèse de domination*) sur I alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim \int_I f_n$.
L'intégrabilité des f_n est en fait une conséquence de la domination par φ intégrable.

5.2. Séries de fonctions

Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'applications à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux intégrables sur un intervalle I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ soit continue par morceaux sur I et que la série $\sum \int_I |f_n|$ est convergente alors f est intégrable sur I et $\int_I \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

6. INTEGRALE DEPENDANT D'UN PARAMETRE (admis)

6.1. Position du problème:

Soient J et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $J \times I$ dans $\mathbb{K}$. On veut étudier la fonction

$$x \longrightarrow \int_I f(x,t)dt$$

6.2. il y a un problème :

exemple soit $F(x) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{xdt}{x^2+t^2}$. F est définie comme l'intégrale d'une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. Et pourtant F n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car $F(x) = \begin{cases} \pi/2 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -\pi/2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Comme pour les séries de fonctions on a besoin d'hypothèses supplémentaires pour prouver des propriétés de l'intégrale.

6.3. Domaine de définition:

La fonction est définie en tout point de J où la fonction partielle $f_x(t) = f(x,t)$ est intégrable sur I.
On pose alors $g(x) = \int_I f(x,t)dt$

6.4. Continuité:

<u>théorème de base</u> : Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$,telle que:

- pour tout $t \in I$: $x \rightarrow f(x,t)$ soit continue sur J
- pour tout $x \in J$, $t \rightarrow f(x,t)$ soit continue par morceaux intégrable sur I
- il existe ϕ, continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I vérifiant:$\forall (x,t) \in J \times I$, $|f(x,t)| \leq \phi(t)$ (*Hypothèse de domination*),

  <u>alors</u>
- g est continue sur J.

<u>en pratique</u> : Il n'est pas obligatoire de dominer sur $J \times I$. On peut se limiter à un segment $[a,b] \subset J$ et dominer sur $[a,b] \times I$

6.5. Dérivation (formule de Leibniz)

<u>théorème de base</u> : Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$,telle que:

- pour tout $(x,t) \in J \times I$: $f(x,t)$ possède une dérivée partielle par rapport à x et $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J
- pour tout $x \in J$, $t \rightarrow f(x,t)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$soient continues par morceaux intégrables sur I
- il existe ϕ, continue par morceaux sur I, positive et intégrale sur I vérifiant:$\forall (x,t) \in J \times I$, $|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}| \leq \phi(t)$ (*Hypothèse de domination*),

  <u>alors</u>
- g est de classe C^1 sur J et, pour tout x de J, $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$

<u>en pratique</u> : Il n'est pas obligatoire de dominer sur $J \times I$. On peut se limiter à un segment $[a,b] \subset J$ et dominer sur $[a,b] \times I$

6.6. généralisation à la classe k:

<u>théorème de base</u> : Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$,telle que:

- pour tout $t \in I$: $x \rightarrow f(x,t)$ possède une dérivée partielle d'ordre k continue par rapport à x .
- pour tout $x \in J$ pour tout $j \in [[0..k]]$, $t \rightarrow \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ soit continue par morceaux intégrable sur I
- il existe ϕ, continue par morceaux sur I, positive et intégrale sur I vérifiant:$\forall (x,t) \in J \times I$, $|\dfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}| \leq \phi(t)$ (*Hypothèse de domination*),

<u>alors</u>

- g est de classe C^k sur J et, pour tout x de J et pour tout $j \in [[0,k]]$, $g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\ dt$

<u>en pratique</u> : Il n'est pas obligatoire de dominer sur $J \times I$. On peut se limiter à un segment $[a,b] \subset J$ et dominer sur $[a,b] \times I$

6.7. généralisation à la classe infinie:

<u>théorème de base</u> : Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$,telle que:

- pour tout $t \in I$: $x \rightarrow f(x,t)$ soit C^∞ sur J
- pour tout $x \in J$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, $t \rightarrow \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ soit continue par morceaux intégrable sur I , dominée par une fonction ϕ_j, continue par morceaux sur I, positive et intégrale sur I

<u>alors</u>

- g est de classe C^∞ sur J et, pour tout x de J et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\ dt$

<u>en pratique</u> : Il n'est pas obligatoire de dominer sur $J \times I$. On peut se limiter à un segment $[a,b] \subset J$ et dominer sur $[a,b] \times I$

6.8. Intégration: Théorème de Fubini (admis)

Soit $f \in C^0([a,b] \times [c,d], \mathbb{K})$. On a $\displaystyle\int_a^b (\int_c^d f(x,y)\ dy)\ dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\ dx)\ dy$

6.9. Exemple classique : Fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} t^{x-1} e^{-t} dt$:

- Elle est $\mathbf{C}^\infty$sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque, pour tout j,on a sur $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$,
  $|\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)| = |(\ln t)^i \times f(x,t)| \leq \phi(t) = |\ln t|^i e^{-at} \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,$\phi(t) = \bigcirc(1/t^2)$ en $+\infty$ et $\phi(t) = \bigcirc(1/t^{1-a/2})$ en 0.
- $\Gamma'' \geq 0$ et Γ est convexe.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$
- $\exists c \in]1,2[, \Gamma'(c) = 0$. D'où les variations de Γ
- $\lim\limits_{+\infty}(\Gamma) = \lim\limits_{0}(\Gamma) = +\infty$, $\Gamma(x) \sim_0 \dfrac{1}{x}$