TD 18 :EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. REFLEXION SUR LE COURS

1. Résoudre $2x^2y' + y^2 = 1$. Préciser la solution maximale telle que $y(1) = 1$, celle où $y(-1) = -1$, celle où $y(1) = 0$ celle où $y(0) = 1/2$
2. Résoudre sur$] - \pi/2, \pi/2[$, $y' + y \ \tan(x) = \sin(2x)$
3. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de
$$xy' - 2y = 0$$
4. Résoudre le système : $x' = 2x + 5y$, $y' = x - 2y$
5. Déterminer les solutions maximales de
$$|x|\, y' + (x-1)y - x^2 = 0$$
On cherchera les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ puis on ferra un recollement sur $\mathbb{R}$ si possible.

2. EXERCICES

1. Etude de : $1 - y^2 - y'^2(1 - x^2) = 0$
   - Déterminer les solutions affines.
   - Résoudre si $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Montrer que dans ce cas les courbes intégrales sont, en général, incluses dans des ellipses.
   - Résoudre si $|x| > 1$ et $|y| > 1$. ue peut-on dire des courbes intégrales ?
   - Résoudre si $|x| > 1$ et $|y| < 1$
2. Résoudre $(xy' - 2y)^2 = x^2\,(x^4 - y^2)$ sur un intervalle où x est non nul en cherchant l'éqution différentielle vérifiée par la fonction $z(x) = y(x)/x^2$. Etudier ensuite le raccordement en $x = 0$.
3. Résolution de $x^2y'^2 - y^2 - 2xy' = 0$
On pose $y = \tan(\theta)$
   - montrer qu'on peut choisir θ pour avoir : $x\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\cos(\theta)}$.
   - en déduire x en fonction de θ.
4. On veut déterminer l'unique solution de $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + x + y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{(x+y)^2}{4} \end{cases}$ vérifiant $x(0) = y(0) = 0$
Déterminer une équation différentielle vérifiée par $z = x + y$. En déduire $x + y$ en fonction de t.
Calculer x puis y en fonction de t
5. Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle:
$$y' + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$
On utilera l'expression de $\operatorname{arg\,ch}$ à l'aide d'un ln

6. On veut déterminer les solutions maximales de

$$x(1-x)y' + y = x$$

   - Résoudre sur $]-\infty, 0[,]0, 1[,]1, +\infty[$
   - peut-on rccorder les solutions en 0 ?
   - peuton raccorder les solutions en 1 ?
   - Donner les solutions maximales.

7. on veut résoudre $f' + |f| = 0$

   - Résoudre sur un intervlle où $f > 0$
   - Résoudre sur un intervalle où $f < 0$
   - Donner toutes les solutions maximales de l'équation

8. Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f -> g : \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = f'(x) - xf(x)$

   Montrer que D est un endomorphisme de E

   En déterminer les éléments propres

9. Résoudre dans les réels les systèmes (x, y, z sont des fonctions de la variable t) :

   a) $x' = y - z, y' = -2x + y + z, z' = 2x - y - z$

   b) $x' = 4x + 9y - 6z, y' = x + 4y - 2z, z' = 3x + 9y - 5z$ avec les conditions intitiales $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$

10. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{+\infty}(g) = 0$. On considère les fonctions f solutions de l'équation différentielle :

$$f + 2f' = g$$

   - Exprimer f à l'aide de la primitive de $x \to \int_0^x g(t)e^{t/2}dt$
   - Montrer que $\lim_{+\infty}(f) = 0$.

     Indication revenir aux quantificateurs et poser :$\forall \varepsilon > 0, \exists A\ ,\ x \geq A \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$ et en déduire un majorant de $|f\ |$.

11. Soit ϕ une fonction C^0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(0) > 0$. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, ty'(t) + \phi(t)y(t) = 0$$

   en fonction de $F_+(t) = \int_1^t \frac{\phi(x)}{x}dx$ et de $F_-(x) = \int_{-1}^t \frac{\phi(x)}{x}dx$

   En déduire que la fonction nulle est la seule solution sur $\mathbb{R}$

12. Soit l'équation sur R^+

$$y' = ay + b$$

   où a est une constante strictement positive et b une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Montrer que toute solution s'écrit :

$$y(x) = \left(k + \int_0^x b(t)e^{-at}dt\right)e^{ax}$$

   Montrer que $b(t)e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

   Montrer que l'équation admet une et une seule solution y_0 de limite nulle en $+\infty$