TD 19 :EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. REFLEXION SUR LE COURS

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y" - 2y' + 2y = \frac{e^x}{(\cos(x))^2}$$

2. Soit f continue sur $[0,1]$. Montrer par variation des constantes que toute solution de $y" - y = f$ s'écrit :

$$\left(A + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t} f(t)dt\right) e^x + \left(B - \frac{1}{2}\int_0^x e^t f(t)dt\right) e^{-x}$$

montrer qu'il existe une unique fonction $C^2([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant :

$$y" - y = f \ , \ y'(0) = y(0) \ , \ y'(1) = -y(1)$$

3. Soit q une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$.

$$(E) : y" + qy = 0$$

   1. Soit f est une solution bornée
      - montrer que $f'(x) = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t)dt$
      - En déduire que f' admet une limite si x tend vers $+\infty$ .cette limite est notée l.
      - Montrer que si $l > 0$, alors $\lim_{+\infty}(f) = +\infty$
      - Montrer que l est nulle.
   2. Soit f_1 et f_2 deux solutions bornées de (E).
      calculer W'
      Montrer que le Wronskien de f_1 et f_2 est nul .
   3. En déduire que (E) admet des solutions non bornées

4. Soit E l'espace vectoriel des suites complexes bornées.
   On définit sur E $\phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\overline{u_n}.v_n$.

   - Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .
   - calculer la norme de la suite constante : $\forall n$, $u_n = a$
   - Soit $U_k = (u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{k,k} = 1$, $u_{k,j} = 0$ si $j <> k$ (U_k est la suite ayant un et un seul coefficient égale à 1 : le k-ème , tous les autres étant nuls)
     Montrer que $(U_k)_{k=0}^N$ est une famille orthogonale. Déterminer $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$ pour que $(\lambda_k U_k)$ soit une famille orthonormale.
   - Soit F le sous espace vectoriel des suites stationnaires .
     Montrer que pour tout k , $U_k \in F$
     Soit $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E vérifiant $\forall k$ $\phi((V, U_k)) = 0$, montrer que V est la suite nulle.
   - Montrer $F^\perp = 0$. a-t-on $F \oplus F^\perp = E$?

2. EXERCICES

1. Résoudre (y est une fonction de t)

   - $y" + y = \frac{1}{\cos(t)}$
   - $y" - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$

2. Résoudre sur $]-1,1[$en cherchant d'abord des solutions polynômiales:

$$(1 - x^2)y" - xy' + y = 0$$

   Rep $\lambda x + \mu\sqrt{1 - x^2}$

3. Résoudre les équations . (A chaque fois vérifié que ϕ est une solution particulière de l'équation homogène)

   - $x^2 y" + 3xy' + y = 4x$, $\phi(x) = 1/x$
   - $y" \sin(x)^2 - 2y = 0$ sur $]0, \pi[$, $\phi(x) = \cot an(t)$
   - $(e^x + 3)y" - 3(e^x + 2))y' + (2e^x + 3)y = 0$ $\phi(t) = e^{mt}$

4. Soit l'équation :

$$y" + py' + qy = 0$$

   On s'intéresse aux racines des solutions de cette équation .

   1. Soit f une solution non nulle de cette équation et α une racine de f dont on suppose l'éxistence .
      - montrer $f'(\alpha) \neq 0$
      - En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < |x - \alpha| \leq \varepsilon$, $f(x) \neq 0$
   2. On suppose qu'il existe un autre racine $b > \alpha$.Montrer que l'ensemble $\{b > \alpha, f(b) = 0\}$ admet un plus petit élément noté β
   3. On suppose maintenant avoir deux racines de f α et β consécutives : donc $\forall x \in]\alpha, \beta[$, $f(x) \neq 0$
      - montrer $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$
      - Soit g telle que (f, g) soit un système fondamental de solutions. En étudiant le signe du Wronskien W de f et g montrer que g admet une racine c sur $]\alpha, \beta[$
      - montrer que c est unique .

5. On considère y une solution sur $\mathbb{R}$ de

$$y" e^{-x^2} + y = 0$$

   Montrer:

$$y(x)^2 - y(0)^2 = -2\int_0^x y"(t)y'(t)e^{-t^2}dt = \left(y'(0)^2 - e^{-x^2}y'(x) - 2\int_0^x te^{-t^2}y'(t)^2 dt\right)$$

   Montrer que y est bornée sur $\mathbb{R}$

6. Soient p continue , impaire sur $\mathbb{R}$ et q continue , paire sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que si f et solution de l'équation $y" + py' + qy = 0$ alors $g : x- > f(-x)$ est aussi solution de l'équation.

   Montrer que l'équation $y" + py' + qy = 0$ admet une base de solutions (f_1, f_2) f_1 étant paire et f_2 étant impaire.

7. Soit f une fonction continue intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Exprimer les solutions de $y" + y = f(x)$ à l'aide de $\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ et $\int_0^x \cos(t)f(t)dt$
   Montrer que toute solution de l'équation $y" + y = f(x)$ est bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique solution ayant une limite finie en $+\infty$.

8. Déterminer les fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ f vérifiant l'équation :
$$f'(x) = f(1-x)$$
   On montrera que f est C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f vérifie l'équation $f"(x) = -f(x)$.

9. On cherche les fonctions continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$
   la fonction nulle est solution évidente. On cherche les solutions non identiquement nulle . On note a un réel tel que $f(a) \neq 0$
   1. calculmer $f(0)$
   2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ puis que f y est C^∞
   3. Montrer $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\;, f"(x)f(y) = f(x)f"(y)$
   4. En déduire $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f"(x) = \lambda f(x)$ et déterminer f

10. Soit $\mathbb{C}^4$ muini du produit scalaire canonique.Soient $v = (1, i, 1, -i)$ et $w = (i, 1, 1, i)$
    - calculer $\|v\|$ et $\langle v, w\rangle$
    - déterminer une base orthonormale du plan $P = \text{Vect}(v, w)$ puis une base orthonormale de $P^\perp$
    - déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

11. Déterminez les réels $(x_i)_{i=1}^n$ vérifiant $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = n \end{array} \right.$
    (utilisez Cauchy Schwarz)

12. Dans $\mathbb{R}^4$ donner une base orthonormale de l'hyperplan H $x + y + z - t = 0$.

13. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 PQ$
    On pose pour tout $k \in [0, n]$,$P_k = \left((1-x^2)^k\right)^{(k)}$
    - quel est le degré de P_k
    - Montrer $\forall Q \in E$, $\langle P_k, Q\rangle = (-1)^k \left\langle (1-X^2)^k, Q^{(k)}\right\rangle$
    - Montrer que $(P_k)_{k=0}^n$ est une base orthogonale de E
    - Exprimer $\|P_k\|$ à l'aide d'une intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^p\, dt$.
      On en déduit $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}} 2^n n!$

14. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$. On cherche n vecteurs unitaires $(u_i)_{i=1}^n$ vérifiant:
$$\forall i \neq j \;\; \|u_i - u_j\| = 1$$
    - Faire la figure et interpréter géométriquement si $n = 2$ ou 3 .
    - Si u et v sont unitaires : $\|u - v\| = 1 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 1/2$
    - Construire par récurrence une solution:Soit $(e_k)_{k=1}^n$ une base orthonormale de E.
      - Montrer qu'il existe $(u_i)_{i=1}^k$ dans $Vect(e_i)_{i=1}^k$ pour $k = 2$ et 3
      - On suppose construit $(u_i)_{i=1}^k$ dans $Vect(e_i)_{i=1}^k$.Montrer qu'il existe une solution dans $Vect(e_i)_{i=1}^{k+1}$sous la forme $u_{k+1} = \lambda \sum_{i=1}^k u_i + \mu e_{k+1}$