TD 20 : Espace Euclidien

Dans plusieurs exercices on identifie le vecteur $v$et sa matrice colonne dans une base orthonormée ;: si $v = \sum x_i v_i$ on note aussi $v = (v)$

1. REFLEXION SUR LE COURS

1. nature de l'endomorphisme f ayant dans une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ la matrice :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique . Soit $(u_i)_{i=1}^p$ une famille orthonormée de vecteurs de matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

   Montrer ${}^tMM = I_p$.

   Soit $P = M^tM$ .Calculer P^2 et ${}^tP$. Que peut-on en déduire pour P.

   calculer Pu_i et Pv si $v \perp \mathrm{Vect}(u_i)$. Que peut-on en déduire pour P ?

3. Soit A une matrice carrée $n \times n$ symétrique réelle et X une matrice colonne .Montrer :$AX = 0 \Leftrightarrow A^2X = 0$

4. Soient E un Espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale $B = (e_i)_{i=1}^n$ et f un endomorphisme de E.

   - Montrer qu'il existe une unique application notée f^* telle que :

   $$\forall\,(x,y) \in E^2 : \; < x, f(y) >=< y, f^*(x) >$$

   - Montrer que f est linéaire et que $Mat_B(f^*) = {}^t\,(Mat_B(f))$
   - Montrer que $f- > f^*$ est un isomorphisme involutif de $\mathcal{L}\,(E)$
   - Comparer le rang et le déterminant de f^* à ceux de f.
   - Montrer $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$ et $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$
   - Montrer que f^*f est un endomorphisme symétrique et que les valeurs propres de f^*f sont toutes positives.

2. EXERCICES

1. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien nature des endomorphismes de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 32 \\ -8 & 80 & 4 \\ 32 & 4 & 65 \end{pmatrix}$$

2. Etudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant dans une base orthonormée la matrice :$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soient f une rotation d'axe D et d'angle $\theta \neq 0[\pi)$ et g un endomorphisme qui commute avec f.

   Soit M la matrice de f dans une base orthonormale adaptée et N celle de G dans cette base.

   Montrer que D est stable par g. Qu'en déduit-on pour N.

   en étudiant ${}^tM$ et ${}^tN$ déterminer une propriété de la première ligne de N . En déduire que $D^{\perp}$ est stable par g .

   montrer que g induit sur $D^{\perp}$ une similitude directe.

   Enoncer une réciproque.

4. On se place dans un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormale..Soit v=$(v_i)_{i=1}^n$ un vecteur de norme 1 .

   On note $u = (1/\sqrt{n})_{i=1}^n$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont $1/\sqrt{n}$ et $w = (|v_i|)_{i=1}^n$

   - Montrer $\sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sqrt{n}$. Si $n = 2$ ou $n = 3$ préciser les cas d'égalité.
   - Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$. Si $n = 2$ ou $n = 3$ préciser les cas d'égalité.
   - montrer que $\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\right| \leq n$ en introduisant $V = Au$. Etudier les cas d'égalités si $n = 2$

5. Soit M une matrice symétrique complexe ayant tous ses termes nuls sauf ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne :$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

   Exprimer M^3 comme combinaison linéaire de M^2 et de M .

   Si $a_n = 0$ donner une CNS sur les coefficients (a_i) pour que la matrice soit diagonalisable . (remarque toute matrice symétrique complexe n'est pas diagonalisable)

6. Soit E espace vectoriel euclidien , a un vecteur unitaire , et k un réel. Soit u_k défini par:

   $$\forall x \in E, u_k(x) = x + k < x, a > a$$

   Montrer que u_k est diagonalisable dans une base orthonormale.

   Pour quelles valeurs de k u_k est-il un automorphisme?

   Montrer que a est toujours vecteur propre.

   Pour quelles valeurs de k , u_k est-il un endomorphisme orthogonal. Préciser la nature de u_k.

7. Soit A une matrice symétrique réelle.

   - Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle vérifiant $B^2 = A$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives.
   - Montrer que alors il existe une matrice B ayant toutes ses valeurs propres positives.
   - Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(A) = B$ (faire une interpolation de Lagrange avec les valeurs propres de A)
   - Montrer que B est unique.

8. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.

- Montrer que $S = \{\|u(x)\|, \|x\| = 1\}$ admet un plus grand élément M.
- Montrer que si u est symétrique M=max $\{|\lambda|, \lambda \in Sp(u)\}$

9. Soient $\mathbb{R}^n$ espace vectoriel euclidien , f et g deux endomorphismes symétriques tels que $f \circ g = g \circ f$
   - montrer que f et g ont un vecteur propre commun. (utiliser l'endomorphisme induit par g sur un sous espace propre de f)
   - montrer qu'il existe un base orthonormale de vecteurs propres communs (récurrence sur n)
10. Soit A une matrice antisymétrique réelle $n \times n$
    - Montrer que si n est impair $\det(A) = 0$
    - Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle non nulle.
      (prendre X un vecteur propre associé à λ et étudier ${}^tXAX$)
    - Montrer que A^2 est symétrique et que $Sp(A^2) \subset \mathbb{R}^-$
    - Soit X une matrice propre de A^2 associé à une valeur propre non nulle. montrer que (X, AX) est un plan stable par A.
    - Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par bloc . Chaque bloc diagonal étant une matrice 2×2 antisymétrique ou étant une matrice nulle.
11. Montrer que si A et une matrice symétrique réelle la somme des carrés des coefficients de A est égale à la somme des carrés des valeurs propres.
12. Soit A une matrice symétrique réelle vérifiant $A^3 - 2A^2 + A = 0$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur
13. On veut étudier des propriétés de la limite de suites convergentes de matrices : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de limite A.
    1. Quel est la limite de la suite $\det(A_n)$?
    2. Montrer que si les A_n ne sont pas inversible , alors A n'est pas inversible.
    3. Montrer que si les A_n sont symétriques , alors A est symétrique.
    4. Montrer que si les A_n sont orthogonales , alors A est orthogonale.
14.
    1. Montrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_q(\mathbf{K})$ est limite d'une suite de matrices carrées inversibles.(Commencer par le cas d'une matrice $J_r = diag(1, , 1, 0, 0)$)
    2. Montrer que pour toute suite convergente de matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbf{K})$, la suite des polynômes caractéristiques de ces matrices converge vers le polynôme caractéristique de la matrice limite.
    3. Prouver que si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbf{K})$ alors $P_{AB}(\lambda) = P_{BA}(\lambda)$. (on pourra commencer en supposant que l'une des deux matrices est inversible).
15. Soit E un EV euclidien de dimension finie $n > 0$.

    Un endomorphisme de E ϕ est dit borné ssi :$\forall x \in E, \{\phi^p(x), p \in \mathbb{N}\}$ est borné .
    1. montrer que si λ est valeur propre de ϕ alors $|\lambda| \leq 1$
    2. si ϕ est diagonalisable montrer que la réciproque est vraie .
    3. On suppose que λ est une valeur propre de ϕ telle que $|\lambda| = 1$. On prend $x \in Ker\left((\phi - \lambda Id)^2\right)$
       Soit $y = \phi(x) - \lambda x$.Calculer $\phi(y)$ en fonction de y .
       Vérifier $\forall p \in \mathbb{N}, \phi^p(x) \in Vect(x, y)$ en calculant les coordonnées de $\phi^p(x)$ dans ce système .
       En déduire $Ker\left((\phi - \lambda Id)^2\right) = Ker\left(\phi - \lambda Id\right)$
       Montrer $E = Ker(\phi - \lambda Id) \oplus \text{Im}(\phi - \lambda Id)$