T.D MAPLE 6

1. Séries de Fourier:

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(x/2)|$

   1. tracer le graphe de f.
   2. quelle est la période de f,Quelle est la parité de f.
   3. Calculer les coefficients de Fourier de f (il faudra dire explicitement à Maple que n est entier pour avoir des simplifications)

      Soit $S_n(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))$
   4. Quel théorème du cours s'applique concernant la convergence de la suite (S_n)
   5. tracer sur une même figure le graphe de f et celui de S_2 . puis f et S_5

      On constate que S_5 est déjà une bonne approximation de f.
   6. Quelle relation donne la formule de Parseval.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\left\{\begin{array}{c} f \text{ est } 2\pi \text{ périodique} \\ \forall x \in]-\pi,\pi]\ ,\ f(x) = \sin(x/2) \end{array}\right.$. On remarque que f est impaire.

   1. Tracer le graphe de $\sin(x/2)$ sur $[-\pi,\pi]$
   2. Calculer les coefficients de Fourier de f(il faudra dire explicitement à Maple que n est entier pour avoir des simplifications)

      Soit $S_n(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))$
   3. Quel théorème du cours s'applique concernant la convergence de la suite (S_n)

      tracer sur une même figure le graphe de f et celui de S_2 . puis f et S_5 , puis ... (sans prendre n trop grand)

      On constate que la convergence est très lente (et donc que l'approximation par la somme partielle est mauvaise) en π^-
   4. Quelle relation donne la formule de Parseval.

2. Série entière :

1. Soit $a_k = \dfrac{(2k+2)!}{k!(k+2)!}$

   1. Déterminer le rayon, de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$
   2. Calculer la somme $f$de la série.
   3. Tracer sur un même graphe f et une somme partielle . Que pensez vous de l'approximation?

2. Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1/3}$$

   - Détermi,er le rayon de convergence.
   - Maple sait-il calculer f ?
   - Calculer $f(0)$
   - Montrer que $xf'x) + f(x)/3$ se simplifie.(utiliser `combine` pour réunir les deux $\sum$)
   - En déduire une équation différentielle vérifiée par f
   - Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$
   - Déterminer l'unique solution prenant la bonne valeur en 0^+
   - En déduire f sur $[0, 1/4[$