

# Fonctions de plusieurs variables

## 1. APPLICATIONS DE CLASSE $C^1$

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

(En pratique  $p = 2$  ou  $3$  et  $n = 1, 2$ , ou  $3$ )

$\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$  sont munis de leur base canonique et si  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  on note  $(x_i)_{i=1}^p$  ses coordonnées.

### 1.1. Fonction partielles

Soit  $x$  un vecteur de  $U$ . La  $i$ -ème fonction partielle de  $f$  est la fonction  $t \mapsto f_{x_i}(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_p)$

définie sur un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ .

$f_{x_i}$  dépend de  $x$ .

On suppose donc fixées les coordonnées du vecteur autres que la  $i$ -ème qui elle est variable. On a  $f_{x_i}(x_i) = f(x)$

rappel : la continuité des fonction partielles n'implique pas celle de la fonction : exemple  $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

### 1.2. Dérivées partielles

Soit  $a = (x_i)_{i=1}^p$  un point de  $U$ .

Dérivée selon un vecteur : Soit  $h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  Il existe  $\delta > 0$  tel que  $[a - \delta h, a + \delta h] \subset U$

Si  $\varphi_h : t \mapsto f(a + th)$  est dérivable en 0, on dit que  $f$  admet en  $a$  une dérivée suivant  $h$ . On note  $D_h f(a) = \varphi'_h(0)$ .

$f$  admet une dérivée selon  $h$  si et seulement si chaque fonction coordonnée admet une dérivée selon  $h$ .

Dérivées partielles (dérivée suivant les vecteurs de la base canonique) On note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  ou  $D_i f(a)$  ou encore

$f'_{x_i}(a)$  la dérivée de  $f$  selon le  $i$ -ème vecteur de base. C'est la dérivée en  $x_i$  de la fonction partielle  $f_{x_i}$ .

### 1.3. Applications de classe $C^1$

Une application d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est dite de classe  $C^1$  sur  $U$  lorsqu'elle admet en chaque point de  $U$  des dérivées partielles par rapport à chaque variable continues sur  $U$ .

$$\forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ existe et est continue sur } U$$

On notera  $C^1(U, \mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des applications de classe  $C^1$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**exemples:**

- Toute fonction polynôme à  $p$  variables réelles est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ ,
- Toute fonction rationnelle est de classe  $C^1$  sur son ouvert de définition.
- Une application linéaire (resp. affine) de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ .

### 1.4. Structure:

- L'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  sur  $U$  est un espace vectoriel
- L'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  sur  $U$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  est une  $\mathbb{R}$  algèbre
- Tout "produit usuel" de fonctions de classe  $C^1$  est  $C^1$ .

### 1.5. Théorème fondamental (admis):

Toute fonction de classe  $C^1$  sur  $U$  y est continue et admet en tout point de  $U$  une dérivée selon tout vecteur  $h$  donnée par :

$$D_h f(a) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

conséquences pour une fonction  $C^1$  sur  $U$ :

- l'application  $h \mapsto D_h f(a)$  est une application linéaire, appelée différentielle de  $f$  en  $a$  et notée  $df(a)$
- $f(a + th) = f(a) + \sum_{i=1}^p th_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(t)$

## 1.6. Matrice jacobienne, jacobien

Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$ . On appelle matrice jacobienne de  $f$  en  $a$  la matrice la matrice de  $df(a)$ : la matrice

jacobienne est la matrice  $J_f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$

Si  $n = p$  son déterminant est le jacobien de  $f$  en  $a$ .

Exemple:  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . La matrice jacobienne est :  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$  et le jacobien  $r$ .

## 2. COMPOSITION D'APPLICATIONS DE CLASSE $C^1$

### 2.1. cas d'une fonction définie sur un intervalle (admis)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $\varphi \in C^1(I, U)$  et  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ , alors  $f \circ \varphi$  est  $C^1$  sur  $I$  et:

$$(f \circ \varphi)'(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(a)) \times \varphi'_k(a)$$

en notant  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ . Les  $\varphi_k$  étant donc les fonctions coordonnées  $\forall x \in I \varphi(x) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x) e_k$

### 2.2. cas général

Soit  $g : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que

- $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^q$ .
- $g(V) \subset U$
- $f$  est  $C^1$  sur  $U$  et  $g$  est  $C^1$  sur  $V$
- $a \in V$ .

alors si on note  $(x_i)$  les variables dans  $\mathbb{R}^p$  et  $(u_j)$  les variables dans  $\mathbb{R}^q$  et  $(g_k)_{k=1}^p$  les coordonnées de  $g$

$\left( \forall x \in V g(x) = \sum_{k=1}^p g_k(x) \right)$  on a

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial u_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial u_j}(a)$$

Par abus de langage on écrit  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix}$ , en identifiant la variable et la coordonnée correspondante

de l'image. On a alors :

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial u_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(a)) \frac{\partial x_k}{\partial u_j}(a)$$

On a donc :

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \circ g \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_j}$$

Il est souvent préférable en math de donner un nom différent aux fonctions et d'éviter d'écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_j}$$

Exemples :

- passage en polaires:  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$
- dérivation de :  $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ ,  $f$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $]a, b[ \times ]c, d[$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha(I) \subset ]c, d[$  et  $\beta(I) \subset ]c, d[$ . en considérant  $g(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) dt$

### 2.3. $C^1$ Difféomorphisme

**définition:** Soit  $f$  une bijection d'un ouvert  $U$  sur un ouvert  $V$ .  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme si et seulement si  $f$  est  $C^1$  sur  $U$  et  $f^{-1}$  est  $C^1$  sur  $V$ .

**critère:(admis)** Si  $f$  est injective de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et si, pour tout  $a \in U$ , le jacobien en  $a$  est non nul alors :

- $V = \text{Im}(f)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$
- $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ .

de plus on a la relation  $J_{f^{-1}}(a) = (J_f(f^{-1}(a)))^{-1}$

**application aux courbes :** Si  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ , l'image d'une courbe  $\Gamma$  régulière est une courbe régulière  $f(\Gamma)$ . Un vecteur directeur de la tangente en  $f(a)$  à  $f(\Gamma)$  est alors l'image par  $df(a)$  d'un vecteur directeur de la tangente en  $a$  à  $\Gamma$ .

### 3. FONCTIONS DE CLASSE $C^k$ , $k \geq 2$

#### 3.1. Dérivées partielles d'ordre $k$ , $k \geq 2$

Soit fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Si chaque dérivée partielle est de classe  $C^1$  sur  $U$  on dit que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ .  $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p)$  est noté  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_p)$ .

Par récurrence on définit la notion de fonction de classe  $C^k$  sur  $U$ :

- Une fonction est de classe  $C^k$  sur  $U$  si et seulement si elle y est de classe  $C^{k-1}$  et si toutes les dérivées partielles de toutes les dérivées d'ordre  $k-1$  sont continues. Ces dérivées sont alors les dérivées partielles d'ordre  $k$  de la fonction.

Pour une fonction de classe  $C^k$  sur  $U$  on dispose des fonctions  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ .

Si une fonction est de classe  $C^k$  sur  $U$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on dit qu'elle est de classe  $C^\infty$  sur  $U$ .

- Les fonctions de classe  $C^k$  forment un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
- Les fonctions à valeurs réelles de classe  $C^k$  forment un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, stable par produit.
- La composée deux fonctions de classe  $C^k$  est de classe  $C^k$ .

#### 3.2. Théorème de Schwarz (admis)

Si  $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ , pour tous  $i$  et  $j$  de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ . Evidemment ceci se généralise pour des dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 lorsque  $f$  est de classe  $C^k$  avec  $k \geq 2$ .

#### 3.3. Difféomorphisme de classe $C^k$

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une application de classe  $C^k$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour que  $f(U)$  soit un ouvert et que  $f$  soit un difféomorphisme de classe  $C^k$  de  $U$  sur  $f(U)$  il suffit que  $f$  soit injective et que  $(\forall a \in U), df(a) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ .

### 4. FONCTIONS NUMERIQUES (A VALEURS REELLES)

#### 4.1. Structure:

$C^1(U, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, stable par produit.

##### Règles de calcul:

Soient  $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$  :

$$1. \forall i, \frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$2. \forall i, \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$3. : \forall i, \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$4. \text{ Si } g \text{ ne s'annule pas sur } U, \frac{1}{g} \in C^1(U, \mathbb{R}) \text{ et } \forall i, \frac{\partial(1/g)}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}. \text{ On en déduit la dérivée d'un quotient.}$$

## 4.2. Gradient

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .  $\mathbb{R}^p$  est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.

Pour tout  $a \in U$ ,  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ , il existe donc un unique vecteur  $\vec{V}$  tel que  $(\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^p), df(a)(\vec{h}) = (\vec{V} | \vec{h})$ .

$\vec{V}$  est noté  $grad f(a)$  et appelé gradient de  $f$  en  $a$ .

Les composantes de  $grad f(a)$  dans la base orthonormée formée par la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  sont définis par le

$$p\text{-uplet: } \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1(a) \\ \partial f / \partial x_2(a) \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_p(a) \end{pmatrix}.$$

Dans le plan on verra que le gradient, s'il est non nul, est un vecteur normal aux courbes  $f(v) = Cste$

Dans l'espace on verra que le gradient, s'il est non nul, est un vecteur normal aux surfaces  $f(v) = Cste$

### Règles de calcul:

Soient  $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$  :

1.  $grad(f + g) = grad(f) + grad(g)$
2.  $grad(\lambda f) = \lambda grad(f)$
3.  $grad(f.g) = f.gradg + g.grad(f)$
4. Si  $g$  ne s'annule pas sur  $U$ ,  $grad\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-grad(f)}{f^2}$ . On en déduit le gradient d'un quotient.

## 4.3. Points critiques

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .  $a \in U$  est dit point critique lorsque  $df(a) = 0$  ce qui équivaut à dire que toutes les dérivées partielles en  $a$  sont nulles.

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Si  $f$  présente un extremum local en  $a \in U$  alors on a un point critique en  $a$ .

## 4.4. Fonction implicite

### rappel des propriétés des courbes définies implicitement.

Lorsque l'on a une équation du type :  $f(x, y) = 0$ , le problème qu'on se pose est celui de la résolution en  $y$  (ou en  $z$ ) d'une telle équation dans un voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$  vérifiant l'équation.

On dira que  $f(x, y) = 0$  définit implicitement  $y$  en fonction de  $x$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  lorsqu'il existe un ouvert  $V$  contenant  $(x_0, y_0)$  et une fonction  $\varphi$  définie sur un voisinage  $W$  de  $x_0$  telle que :

$$(\forall (x, y) \in V), (f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x))$$

On a bien sûr une définition analogue pour les équations à trois variables.

Théorème des fonctions implicites. Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  (où  $U$  est ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ). On suppose que  $f(x_0, y_0) = 0$

et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , alors l'équation  $f(x, y) = 0$  définit implicitement au voisinage de  $(x_0, y_0)$  une fonction  $y$  de  $x$  (notée  $\varphi$ ) de classe  $C^1$  dans un intervalle  $I$  ouvert contenant  $x_0$  telle que:

$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x, \varphi(x)) = 0 \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

de plus :

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

**Tangente à une courbe définie par  $f(x, y) = 0$  :** Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, on voit, par application de (1), que la tangente en  $(x_0, y_0)$  à la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  a pour équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Le résultat reste vrai si  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ .

En repère orthonormé, si  $grad f(x_0, y_0) \neq 0$  alors  $grad f(x_0, y_0)$  est orthogonal à la tangente à la courbe en  $(x_0, y_0)$ .

généralisation en dimension 3 (cf chapitre sur les surfaces)

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  (où  $U$  est ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ). On suppose que  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Si  $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , alors l'équation  $f(x, y, z) = 0$  définit implicitement au voisinage de  $(x_0, y_0, z_0)$  une fonction  $z$  de  $(x, y)$  (notée  $\varphi$ ) de classe  $C^1$  dans un rectangle  $I \times J$  ouvert contenant  $(x_0, y_0)$  telle que:

$$\begin{aligned} (\forall (x, y) \in P), f(x, y, \varphi(x, y)) &= 0 \\ \varphi(x_0, y_0) &= z_0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \end{aligned}$$

le vecteur gradient est alors un vecteur normal au plan tangent à la surface

## 5. INTEGRATION

### 5.1. INTEGRALES DOUBLES

#### 5.1.1. définitions:

Soit  $f$  une fonction continue sur un compact  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Si il existe deux réels  $a$  et  $b$  et deux fonctions  $\phi$  et  $\psi$  continues sur  $[a, b]$  telles que

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x))$$

On pose:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Si il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  et deux fonctions  $u$  et  $v$  continues sur  $[\alpha, \beta]$  telles que

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (\alpha \leq y \leq \beta, u(y) \leq x \leq v(y))$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \left( \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

théorème de Fubini : Si les deux expressions sont possibles les deux formules donnent le même résultat ( admis)

#### 5.1.2. aire

On définit l'aire d'un domaine plan  $D$  par l'intégrale double sur  $D$  de la fonction constante 1.

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy$$

#### 5.1.3. propriétés:

- l'intégrale double est linéaire et croissante.
- Chasles:(admis) Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux domaines tels que  $\mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = 0$  et  $f$  continue sur  $D_1 \cup D_2$  alors:
 
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$
- La relation de Chasles permet de généraliser la notion d'intégrale double sur un compact qui n'est pas du type initial.

#### 5.1.4. changement de variable:(admis)

- Soit  $\phi$  une application  $C_1$  de  $D$  dans  $\Delta$  bijective sauf sur un domaine d'aire nulle .

$$\iint_\Delta f(u, v) du dv = \iint_D f \circ \phi(x, y) |J_\phi(x, y)| dx dy$$

où  $J_\phi$  représente le jacobien de  $\phi$

- exemple: $\phi$  est le passage en coordonnées polaires:  $u = r \cos(\theta)$ ,  $v = r \sin(\theta)$

$$\iint_\Delta f(u, v) du dv = \iint_D f \circ \phi(r, \theta) r dr d\theta$$

- l'aire d'un domaine  $D$  est donc  $= \iint_\Delta r dr d\theta$  si  $(r, \theta) \rightarrow (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  est une bijection de  $\Delta$  sur  $D$  (sauf sur un domaine d'aire nulle)

## 5.2. circulation d'un champ de vecteur:

Soit  $\gamma = ([a, b], f)$  une courbe  $C^1$  d'image incluse dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $F$  une fonction  $C^0$  sur  $U$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On appelle circulation de  $F$  sur  $\gamma$  l'intégrale:

$$I = \int_{\gamma} \langle F(M), dM \rangle = \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle dt$$

Le résultat du calcul est indépendant du paramétrage admissible orienté de la courbe.

Si  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  et  $f(t) = (x(t), y(t))$

$$I = \int_{\gamma} \langle F(M), dM \rangle = \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt$$

## 5.3. Intégrale sur un arc :

Soit  $\gamma = ([a, b], f)$  une courbe  $C^1$  d'image incluse dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $P, Q$  deux fonctions  $C^0$  sur  $U$ . On appelle intégrale curviligne sur  $\gamma$  de la forme différentielle  $\omega = Pdx + Qdy$  l'intégrale:

$$I = \int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt$$

Le résultat du calcul est indépendant du paramétrage admissible orienté de la courbe .

## 5.4. Formule de Green Riemann (admis):

Soit  $\gamma$  une courbe  $C^1$  fermé, simple, orienté dans le sens direct, entourant un domaine  $D$ . et  $P, Q$  deux fonctions  $C^1$  sur un ouvert  $U$  contenant  $D$  alors :

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

### 5.4.1. cas particulier de l'aire:

Si on prend  $P = -y$  et  $Q = x$  on a :

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx)$$

Si on passe en polaire en paramétrant le bord  $x = r(\theta) \cos(\theta), y = r(\theta) \sin(\theta)$  on a :

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} r^2 d\theta$$