Le thème du produit infini est un grand classique des sujets de concours. La partie I : (exemples et convergence) est commune à ces problèmes , les parties 2 et 3 proviennent d'un sujet de CCP 1988 option TB

PREMIERE PARTIE

dans cette partie on étudie des suites numériques toutes les limites sont en $n = +\infty$

1.

1. Pour $n \geq n_0$ $P_n = 0$. Le produit infini converge vers 0
2. On a $\forall n \geq 1$: $P_n = 2^n$. le produit infini diverge
3. On a $\forall n \geq 1$: $P_n = 2^{-n}$: le produit converge vers 0
4. On a
$$\forall n \geq 1 : P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=2}^{n+1} k} = \frac{1}{n+1}$$
le produit converge vers 0;
5. On a
$$p_n = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$
donc:
$$\forall n \geq 1 : P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+2)\right)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=3}^{n+2} k\right)}{\prod_{k=2}^{n+1} k^2} = \frac{(1.2)\left((n+1)(n+2)\right)}{\left(2.(n+1)\right)^2} = \frac{n+2}{2n+2}$$
Le produit infini converge vers 1/2.
6. On remarque que :
$$\forall n \geq 1 : p_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} \text{ et } p_{2n} = 1 - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}$$
et donc
$$\forall n \geq 1 : p_{2n-1}.p_{2n} = 1$$
ce qui donne :
$$\forall n \geq 1 : \; P_{2n} = 1 \text{ et } P_{2n+1} = \frac{2n+4}{2n+3}$$
La suite des termes pairs et celle des termes impairs tendent vers 1.
Le produit infini converge vers 1.
7. On a :
$$\forall n \geq 1 : p_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} (1/2)^k\right) = \exp\left(\frac{1}{2}.\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}\right) \text{ de limite } \exp(1)$$
le produit infini converge vers e .
On remarquera que les exemples 2 et 3 illustre les cas où $\lim(p_n) \neq 1$, les exemples 4 et 5 les cas où $u_n < 0$ avec une fois $\sum u_n$ diverge , puis $\sum u_n$ converge , l'exemple 7 le cas où $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge , enfin le cas 6 est un exemple où $\sum u_n$ ne converge pas absolument , mais $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent.
même si tous les cas traités ensuite ne sont pas abordés dans ces exemples , vous devez déjà être protégé d'un nombre significatif d'erreurs. ,

2. L'hypothèse implique que la suite (P_n) est aussi à valeurs non nulles. On peut donc écrire :
$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$$
le numérateur admet une limite (le produit infini) et le dénominateur admet une limite (la même par translation d'indice) non nulle (par hypothèse) . On peut dire que la limite du quotient est le quotient des limites :
$$\boxed{\lim_{n->+\infty}(p_n) = 1}$$

3.

1. Comme la suite (p_n) tend vers 1 si on prend $\varepsilon = 1/2$ dans la définition de la limite on a :

$$\exists n_0 \ , n \geq n_0 \Rightarrow |p_n - 1| \leq 1/2$$

et donc :

$$\exists n_0 \ , n \geq n_0 \Rightarrow p_n \geq 1/2 > 0$$

On a donc à partir d'un certain rang $p_n = (1 + u_n) > 0$ ce qui assure alors l'existence de $\ln(1 + u_n)$
On remarquera aussi que la suite (u_n) tend vers 0.Ce qui justifie les développements limités et équivalent qui sont tous au voisinage de 0

2. Attention : on ne sait pas si les premiers termes de la suite sont positifs. Il faut travailler à partir du rang n_0 .
Soit $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} \ln(1 + u_k)$ et $\pi_n = \prod_{k=n_0}^{n} p_k$, les sommes partielles de la série $\sum \ln(1 + u_k)$. On a :

$$\forall n \geq n_0 : \ S_n = \ln(\pi_n) \ , \text{ et } \pi_n = \exp(S_n)$$

On a alors $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n_0-1} p_k.\pi_n$ avec $\displaystyle\prod_{k=1}^{n_0-1} p_k$ constante non nulle . Donc les suites (P_n) et (π_n) sont de même nature.

   - Si la série $\sum(1 + u_n)$ converge , la suite (S_n) converge. On note sa limite l . La suite (π_n) converge vers $\exp(l) \neq 0$ par continuité de exp sur $\mathbb{R}$
   - Si la suite (π_n) converge vers $L \neq 0$, alors $L > 0$ (car la suite est à valeurs positives pour $n \geq n_0$) et donc la suite (S_n) converge vers $\ln(L)$ par continuité du ln sur $\mathbb{R}^{+*}$

On a donc convergence de la série , si et seulement le produit converge et $\prod_{k=n_0}^{+\infty} p_k \neq 0$.

$$\boxed{\sum \ln(1 = u_n) \text{ converge si et seulement si } \prod p_k \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty} p_k \neq 0}$$

3. Avec les hypothèses les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1 + u_n)$sont à termes positifs et équivalents. Les deux séries sont de même nature. De plus l'hypothèse $\forall n \geq 1 \ , \ u_n > 0$ montre que $P_n \geq 1$. La suite (P_n) si elle converge ne peut pas tendre vers 0 .
Et donc d'après la question 3.1:

$$\boxed{\text{Si } \forall n \geq 1, u_n > 0 : \prod(1 + u_k) \text{ converge si et seulement si } \sum u_k \text{ converge}}$$

4. D'après les 3.1 $1 + u_n$ est strictement positif à partir d'un certain rang
   - Si la série $\sum u_k$ diverge , par équivalence du terme général négatif , la série $\sum \ln(1 + u_k)$ diverge . Et donc comme elle est à termes négatifs $S_n \longrightarrow -\infty$. en prenant l'exponentiel $P_n \longrightarrow 0$
   - Si la série $\sum u_k$ converge , par équivalence du terme général négatif , la série $\sum \ln(1 + u_k)$ converge . Et donc (P_n) admet une limite non nulle.

$$\boxed{\text{Si } \forall n \geq 1, u_n < 0 : \left\{ \begin{array}{l} \sum u_k \text{ diverge } \Rightarrow \prod(1 + u_k) \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k) = 0 \\ \sum u_k \text{ converge } \Rightarrow \prod(1 + u_k) \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k) \neq 0 \end{array} \right.}$$

5. Si la série $\sum u_k$ converge absolument alors par équivalence la série $\sum \ln(1 + u_k)$ converge absolument , Elle converge donc . Et donc le produit infini converge et le produit est non nul.

$$\boxed{\sum u_k \text{ converge absolument} \Longrightarrow \prod(1 + u_k) \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k) \neq 0}$$

6. On pousse le développement limité un cran plus loin :

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o\left(u_n^2\right)$$

donc si $v_k = \ln(1 + u_k) - u_k$ on a $v_k \sim -\frac{1}{2}u_k^2$. la suite (v_k) est donc négative à partir d'un certain rang . on a donc $\sum v_k$ converge si et seulement si $\sum u_k^2$ converge.
Mais si $\sum v_k$ converge alors $\sum \ln(1 + u_k)$ converge comme somme de séries convergentes ; et si $\sum v_k$ diverge alors $\sum \ln(1 + u_k)$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une divergente. Donc toujours avec 3.1:

$$\sum u_k^2 \text{ converge } \Leftrightarrow \sum v_k \text{ converge } \Leftrightarrow \sum \ln(1 + u_k) \text{ converge } \Leftrightarrow \prod(1 + u_k) \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k) \neq 0$$

$$\boxed{\text{Si } \sum u_k \text{ converge alors } \left(\sum u_k^2 \text{ converge si et seulement si } \prod(1 + u_k) \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k) \neq 0 \right)}$$

DEUXIEME PARTIE

1. On remarque que pour tout x réel et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) \neq 0$. et $\lim (g_n(x)) = 1$ On peut donc utiliser les résultats du I.3

   On pose $u_n(x) = g_n(x) - 1$.

   On a alors quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \left(\exp\left(\frac{x}{n}\right).\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right) - 1 = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{x^2}{2}.\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

   On a donc par équivalent que $\sum u_n(x)$ converge absolument et donc que la suite $(G_n(x))$ admet une limite non nulle.

   De plus tous les termes de la suites sont positifs , donc la limite est strictement positive.

2. On a : $G_n(1) = \frac{\prod_{k=1}^n \exp\{1/k\}}{\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}} = \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}{n+1\ .}$. Même simplification au dénominateur qu'au I1.4

   Ce qui donne $\ln(G_n(1)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. la suite $(G_n(1))$ converge vers $G(1) > 0$ donc $\gamma = \ln(G(1))$

3.

   1. on a :

$$\begin{aligned} \frac{G_n(x+1)}{G_n(x)} &= \prod_{k=1}^n \frac{g_k(x+1)}{g_k(x)} = \prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{x}{k}+\frac{1}{k}}}{\frac{x+1+k}{k}}.\prod_{k=1}^n \frac{\frac{x+k}{k}}{e^{\frac{x}{k}}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}.\prod_{k=1}^n (x+k)\prod_{k=1}^n \frac{1}{x+1+k} \\ &= \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}\frac{x+1}{x+n+1} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}.\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{x+n+1}.(x+1) \end{aligned}$$

      le premier terme tend vers e^γ d'après la question précédente , et $\frac{n+1}{x+n+1}$ tend vers 1

$$\lim_{n->+\infty}\left(\frac{G_n(x+1)}{G_n(x)}\right) = e^\gamma.(x+1)$$

      et donc :

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{e^{-\gamma(x+1)}G(x+1)}{(x+1)}.\frac{x}{e^{-\gamma x}G(x)} = \frac{x.e^{-\gamma}}{x+1}.\frac{G(x+1)}{G(x)}$$

      Or

$$\frac{G(x+1)}{G(x)} = \lim_{n->+\infty}\left(\frac{G_n(x+1)}{G_n(x)}\right)$$

$$\boxed{\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x}$$

      remarque : on peut aussi utiliser $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) + \gamma + o(1)$ *et donc* $\prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}} = e^{\ln(n+1)+o(1)} = (n+1)e^{o(1)} \sim (n+1)$

   2. Partant de $\Gamma(1) = 1$, la relation $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ donne par une récurrence évidente:

$$\boxed{\forall n \geq 1\ ,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$$

      et donc

$$\boxed{G(n) = n!e^{\gamma n}}$$

TROISIEME PARTIE

1. Vérification immédiate.(remarque S_n est un polynôme de Lagrange)

2. Pour s'approcher des parties précédentes on remarque que:

$$S_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2\pi^2-x^2}{k^2\pi^2}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

On peut donc poser $p_n(x)=1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ et $u_n=-\frac{x^2}{n^2\pi^2}$. Comme $\lim(p_n)=1$ on peut étudier le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}p_k(x)$ avec la partie 1.

- Si $x=k\pi$ est un multiple non nul de π alors $p_{|k|}(x)=0$ et donc $\prod_{k=1}^{+\infty}p_k(x)=0$
- Sinon on peut appliquer le $I.3$ et $\sum u_n(x)$ converge (série de Riemann), ce qui assure la convergence du produit infini vers une valeur non nulle.

3. 1. si $x=0$ on a pour tout n , $S_n(0)=1$ donc $S(0)=1$
   si $x=p\pi$, $p\neq 0$ alors pour $n\geq|p|$ $S_n(x)=0$ donc $S(p\pi)=0$
   2. Si $x\neq p\pi$ ($p\in\mathbb{Z}$) alors $S_n(x)$ est non nul pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned}\frac{S_n(x+2\pi)}{S_n(x)} &= \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{x+2\pi-k\pi}{-k\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+2\pi+k\pi}{k\pi}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{x-k\pi}{-k\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k\pi}{k\pi}}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(x+2\pi-k\pi)\prod_{k=1}^{n}(x+2\pi+k\pi)}{\prod_{k=1}^{n}(x-k\pi)\prod_{k=1}^{n}(x+k\pi)}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(x-(k-2)\pi)\prod_{k=1}^{n}(x+(k+2)\pi)}{\prod_{k=1}^{n}(x-k\pi)\prod_{k=1}^{n}(x+k\pi)}=\frac{\prod_{k=-1}^{n-2}(x-k\pi)\prod_{k=3}^{n+2}(x+k\pi)}{\prod_{k=1}^{n}(x-k\pi)\prod_{k=1}^{n}(x+k\pi)}\\ &= \frac{(x+\pi)(x)}{(x-n\pi)((x-(n-1)\pi)}.\frac{(x+(n+1)\pi)(x+(n+2)\pi)}{(x+\pi)(x+2\pi)}\text{ en simplifiant les termes identiques}\\ &= \frac{x}{x+2\pi}.\frac{(x+(n+1)\pi)(x+(n+2)\pi)}{(x-n\pi)((x-(n-1)\pi)}\end{aligned}$$

   On a donc

$$\frac{S_n(x+2\pi)}{S_n(x)}\sim_{n->+\infty}\frac{x}{x+2\pi}.\frac{n^2\pi^2}{(-n\pi)^2}$$

   En passant à la limite on a donc

$$\boxed{S(x+2\pi)=\frac{x}{x+2\pi}S(x)}$$

   3. Si $\phi(x)=xS(x)$ on a donc dans les trois cas $\phi(x+2\pi)=\phi(x)$:
      - si $x=0$: $0.1=2\pi.0$
      - si $x=p\pi$, $p\neq 0$: $x.0=(x+2\pi).0$
      - si $x\neq p\pi$: $xS(x)=(x+2\pi)S(x+2\pi)$ d'après le calcul précédent.

$$\boxed{xS(x)\text{ est }2\pi\text{ périodique}}$$

4. 1. f_x est continue sur $]-\pi,\pi[$. De plus $f(\pi^-)=f(-\pi^-)=\cos(\pi x)$ et donc $f(\pi^+)=f(\pi^-)$, ce qui assure que f_x est aussi continue en π , et donc sur $\mathbb{R}$ par période.
   f_x est C^1 sur $]-\pi,\pi[$. De plus $f'(\pi^-)=-x\sin(\pi x)$ et $f'(\pi^+)=f'(-\pi^-)=x\sin(\pi x)$ et donc ce qui assure que f_x' admet une limite à gauche et à droite en π. f_x est donc C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$ par période.
   f_x est continue , 2π périodique et C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$ donc est développable en série de Fourier (et la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$)
   2. f_x est paire donc les coefficients $b_n(f_x)$ sont tous nuls . et

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(xt)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n2x\sin(\pi x)}{x^2-n^2}=\frac{x\sin(\pi x)}{\pi}.\frac{(-1)^n.2}{x^2-n^2}$$

   en linéarisant $\cos(xt)\cos(nt)=\frac{\cos((x+n)t)-\cos((x-n)t)}{2}$, le dénominateur étant toujours non nul à cause de l'hypothèse $x\in]-1,1[$, x non nul.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ f_x(t)=\frac{x\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{1}{x^2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2-n^2}\cos(nt)\right)}$$

donc si $t=\pi$:

$$\cos(\pi x)=\frac{x\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{1}{x^2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2-n^2}\right)$$

soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}=\frac{1}{x}-\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$$

5. si $x\in]-\pi,\pi[$ alors $\frac{x}{\pi}\in]-1,1[$, donc d'après le calcul précédent pour $x\neq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\frac{x}{\pi}}{n^2-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}=\frac{\pi}{x}-\pi\,\mathrm{cotan}(x)$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}=\frac{1}{x}-\mathrm{cotan}(x)$$

Si $x=0$ la somme est nulle de façon évidente :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}=\begin{cases}\frac{1}{x}-\mathrm{cotan}(x)\text{ si }x\neq 0\\ 0\text{ si }x=0\end{cases}}$$

6. 1. pour $x\in]-\pi,\pi[$, $\phi_n(x)$ est défini négatif pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ car $1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\in]0,1]$. on a une série à termes négatifs . de plus $\phi_n(x)\sim_{n->+\infty}\frac{-x^2}{n^2\pi^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. On a donc la convergence simple de la série sur $]-\pi,\pi[$.
   2. On a $\phi(0)=\sum_1^{+\infty}0=0$
   Pour calculer ϕ' il faut dériver termes à termes la série donc vérifier les hypothèses du théorème de dérivation termes à termes :
      - $\forall n\geq 1$, ϕ_n est C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et
      $$\phi_n'(x)=\frac{\frac{-2x}{n^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}}=\frac{-2x}{n^2\pi^2-x^2}$$
      - $\sum\phi_n(x)$ converge simplement sur $]-\pi,\pi[$
      - $\sum\phi_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]\subset]-\pi,\pi[$: On pose $A=\max(|a|,|b|)$ et donc $\forall x\in]-\pi,\pi[$: $|x|\leq A$ et donc
      $$\forall x\in]-\pi,\pi[\text{ , }\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \left|\phi_n'(x)\right|=\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}\leq\frac{2A}{n^2\pi^2-A^2}$$
      la série $\sum\frac{2A}{n^2\pi^2-A^2}$ est bien indépendante de x et convergente car $\frac{2A}{n^2\pi^2-A^2}\sim_{n->+\infty}\frac{2A}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}$
      - On peut donc dériver termes à termes et
      $$\boxed{\phi'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}=\begin{matrix}\mathrm{cotan}(x)-\frac{1}{x}\text{ si }x\neq 0\\ 0\text{ si }x=0\end{matrix}}$$
      d'après la question précédente.
   3. On a donc comme $\phi(0)=0$ et $\phi'(x)=\begin{matrix}\mathrm{cotan}(x)-\frac{1}{x}\text{ si }x\neq 0\\ 0\text{ si }x=0\end{matrix}$ sur $]-\pi,\pi[$ est continue sur $]-\pi,\pi[$ (car ϕ est C^1)
   $$\phi(x)=\int_0^x\phi'(t)dt$$
   Or une primitive de $\mathrm{cotan}(x)-\frac{1}{x}$ est $\ln(\sin(t))-\ln(t)=\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$. on a donc sur $]-\pi,\pi[-\{0\}$, $\phi(x)=\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)+Cste.$. Comme ϕ est continue en 0 et $\phi(0)=0$, on a par passage à la limite $\lim_{x->0}(\phi(x))=0$, soit $Cste=0$ car $\lim_{x->0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$
   $$\phi(x)=\begin{cases}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\text{ si }x\neq 0\\ 0\text{ si }x=0\end{cases}\quad\text{sur }]-\pi,\pi[$$

Or $\phi(x) = \ln(S(x))$, à cause de la formule donnant S :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \text{, sur }]-\pi, \pi[$$

Le résultat s'étend à $\mathbb{R}$ à cause de la période de $xS(x)$:Si on pose en prolongeant par continuité : $\Sigma(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, sur $[-\pi, \pi]$

On a sur $[-\pi, \pi]$, $x\Sigma(x) = \sin(x)$ (même si $x = 0$) . Les deux fonctions $xS(x)$ et $x\Sigma(x)$ sont 2π périodiques et égales sur une période : $\forall x \in \mathbb{R} : xS(x) = \sin(x)$

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \text{, sur } \mathbb{R}}$$

7. Soit $x \notin \mathbb{Z}$

   1. $$G_n(x)G_n(-x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(x/k)}{1 + (x/k)} . \frac{\exp(-x/k)}{1 - (x/k)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - (x/k)^2}$$

      Or

      $$S_n(\pi x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{k^2 \pi^2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

      on constate que

      $$G_n(x)G_n(-x) = \frac{1}{S_n(\pi x)}$$

   2. On a donc par passage à la limite

      $$G(x)G(-x) = \frac{1}{S(\pi x)} = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \text{ car } x \neq 0$$

   3. Ce qui donne donc :

      $$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x} G(x) \frac{\exp(\gamma x)}{-x} G(-x) = \frac{-\pi}{x \sin(\pi x)}$$

      et comme $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

      $$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = -x\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

   4. si on prend $x = 1/2$

      $$\Gamma(1/2)^2 = \pi$$

      $$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$$