

A tout suite $(p_n)_{n \geq 1}$ de réels , on associe la suite $(P_n)_{n \geq 1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} , P_n = \prod_{k=1}^n p_k$$

Si la suite (P_n) converge , on dit que le produit infini $\prod p_k$ converge et on pose

$$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n p_k \right)$$

On dira alors que le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ converge vers P .

PREMIERE PARTIE

1. . Calculer P_n , étudier si $\prod p_k$ converge et en cas de convergence calculer $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ si :

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* , p_{n_0} = 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = 2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = 1/2$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = \frac{n}{n+1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \right)$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = \exp(2^{-n})$

On suppose dans toute la suite de cette partie que la suite est à valeurs non nulles :

$$\forall n \geq 1 , p_n \neq 0$$

2.

1. Montrer que si la suite (P_n) converge vers un réel non nul alors la suite (p_n) converge vers 1.

3. On suppose dans cette question que la suite (p_n) converge vers 1 . On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = 1 + u_n$

1. Montrer que à partir d'un certain rang n_0 on a $p_n > 0$
2. Montrer que le produit $\prod p_k$ converge et que $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k \neq 0$ si et seulement si la série $\sum \ln(1 + u_k)$ converge.
3. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 0$. montrer que le produit $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ converge si et seulement si la série $\sum u_k$ converge.
4. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n < 0$.
 - Montrer que si la série $\sum u_k$ diverge alors le produit $\prod p_k$ converge et $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k = 0$
 - Montrer que si la série $\sum u_k$ converge alors le produit $\prod p_k$ converge et $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k \neq 0$
5. Montrer que si la série $\sum u_k$ converge absolument le produit $\prod p_k$ converge et $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k \neq 0$
6. Montrer que si la série $\sum u_k$ converge alors le produit $\prod p_k$ converge et $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k \neq 0$ si et seulement si la série $\sum u_k^2$ converge

DEUXIEME PARTIE

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , g_n(x) = \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n}} , G_n(x) = \prod_{k=1}^n g_k(x)$$

1. Montrer que la suite $G_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$, \mathbb{Z}^- désignant l'ensemble des entiers strictement négatifs.

On note alors :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}^- , G(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$$

2. En étudiant $\ln(G_n(1))$ montrer que la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ converge . On note γ sa limite
On pose pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul :

$$\Gamma(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x} G(x)$$

- 3.
1. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{G_n(x+1)}{G_n(x)} \right\} = e^\gamma \cdot (x+1)$. En déduire une expression simple de $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$
 2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n)$. En déduire $G(n)$

TROISIEME PARTIE

On pose $S_n(X) = \prod_{k=1}^n \frac{(k\pi)^2 - X^2}{(k\pi)^2}$

1. Vérifier que S_n est un polynôme de degré $2n$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall k \in [[-n, -1]] , S_n(k\pi) = 0 \\ S_n(0) = 1 \\ \forall k \in [[1, n]] , S_n(k\pi) = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que la suite $S_n(x)$ converge simplement sur \mathbb{R} . On note $S(x)$ la limite de cette suite.

- 3.
1. Si x est un multiple de π que vaut $S(x)$
 2. Si x n'est pas un multiple de π , calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n(x + 2\pi)}{S_n(x)} \right)$$

3. En déduire que la fonction $xS(x)$ est périodique de période 2π
4. réservé au 5/2

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$ on considère la fonction $f_x(t)$ périodique de période 2π et telle que pour $t \in]-\pi, \pi[$,
 $f_x(t) = \cos(xt)$

1. Justifier que f_x est développable en série de Fourier et calculer les coefficients de Fourier réels de f_x
2. Montrer :

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\} , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \pi \cotan(\pi x)$$

les 3/2 admettront cette relation

5. Calculer la somme pour $x \in]-\pi, \pi[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

6. On pose :

$$\forall n \geq 1 , \phi_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

1. Montrer que la série $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]-\pi, \pi[$. On pose $\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n$
2. Calculer $\phi(0)$ et $\phi'(x)$
3. En déduire la valeur de $\phi(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ puis celle de $S(x)$ sur $]-\pi, \pi[$. En déduire :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7. Dans cette question on supposera $x \notin \mathbb{Z}$

1. Montrer que ,

$$G_n(x)G_n(-x) = \frac{1}{S_n(\pi x)}$$

2. En déduire la valeur de $\Gamma(x)\Gamma(-x)$ puis celle de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$
3. Calculer $\Gamma(1/2)$

Remarque 5/2 . on peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que Γ est la fonction d'Euler $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^{++}} t^{x-1} e^{-t} dt$ pour $x > 0$