

PROBLEME

première partie

1. C'est un exemple du cours la somme vaut 1

2.

1. Rappel: si $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ alors $u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. γ est la limite de la suites (u_n) qui converge car $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
2. $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1)$

$$\boxed{\lim \left(\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \right) = \ln(2)}$$

3.

1. On a $:\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} = \frac{-1}{k(2k-1)} \sim -\frac{1}{2k^2}$. on a donc une série à termes négatifs, équivalent au terme général d'une série convergente (série de Riemann avec $a = 2 > 1$).
la série converge.
2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ est la somme des inverse des nombres impairs entre 1 et $2n$. Cette somme est donc égale à la somme des inverse de tous les entiers moins celle des inverses des entiers pairs (toujours entre 1 et $2n$)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

3. On peut donc transformer les sommes partielles de V :

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \right) \\ &= -2 \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

et donc d'après la question précédente.

$$\boxed{V = -2 \ln(2)}$$

deuxième partie:

On utilisera souvent $s_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$

1. Chaque fonction s_n est définie si son dénominateur est non nul ; donc comme $n \geq 1$, s_n est définie sur \mathbb{R} privé de $-n$

Si p est un entier strictement négatif s_{-p} donc aussi S ne sont pas définis.

si $x = 0$ $S(x) = 0$ de façon évidente .

Sinon tous les s_n sont définis et la série $\sum s_n$ converge absolument car $|s_n| = \frac{|x|}{n(n+x)} \sim \frac{|x|}{n^2}$

$$\boxed{S \text{ est définie sur } D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-}$$

2. On a :

- $S(0) = \sum 0 = 0$
- $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$ d'après la première partie
- $S(-1/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} = -2 \ln(2)$ d'après la première partie

3.

1. Par combinaison linéaires de séries convergentes:

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right)$$

On étudie les sommes partielles:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x} \end{aligned}$$

et si N tend vers $+\infty$

$$\boxed{S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}}$$

2. d'où :

- $S(2) - S(1) = \frac{1}{2}$ et $S(2) = \frac{3}{2}$
- $S(1/2) - S(-1/2) = 2$ et $S(1/2) = 2 - 2 \ln(2)$

4.

1. $\lim_{x \rightarrow +} (s_n(x)) = \frac{1}{n}$ on a donc $\sup_{\mathbb{R}^+} (|s_n|) \geq \frac{1}{n} > 0$, ce qui assure la divergence de la série $\sum \sup_{\mathbb{R}^+} (|s_n|)$.

$$\boxed{\sum s_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+}$$

2. Par contre sur $[a, b]$ on a $|s_n(x)| \leq \frac{b}{n^2}$ et donc $0 \leq \sup_{[a,b]} (|s_n|) \leq \frac{b}{n^2}$ ce qui assure la convergence de la série $\sum \sup_{[a,b]} (|s_n|)$

$$\boxed{\sum s_n \text{ converge normalement sur } [a, b]}$$

3. La série $\sum s_n$ est une série à termes continus qui converge simplement sur \mathbb{R}^+ avec convergence normale sur tout segment :

$$\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$$

5.

1. s_n est un quotient de fonction C^1 sur \mathbb{R}^+ à dénominateur non nul.

$$\boxed{s_n \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \text{ et } s'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}}$$

2. Sur \mathbb{R}^+ on a $|s'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ ce qui assure la convergence normale de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ sur \mathbb{R}^+

On a donc :

- $\sum s_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\sum s'_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^+

$$\boxed{S \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \text{ et } S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}}$$

3. la fonction S est donc croissante sur \mathbb{R}^+

4. $S'(0^+) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$, $S'(2) = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4}$

6.

1. ϕ_x est bien continue sur $[1, +\infty[$ et y admet donc des primitives:

$$\int \phi_x(t) dt = \ln(t) - \ln(t+x) + cste = \ln\left(\frac{t}{t+x}\right) + cste$$

2. ϕ_x est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$\phi'_x(t) = \frac{1}{(t+x)^2} - \frac{1}{t^2} \leq 0$$

3. la figure redonne l'encadrement voulu:

On a l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, \forall t \in [n, n+1], \phi_x(n+1) \leq \phi_x(t) \leq \phi_x(n)$$

donc en intégrant :

$$\forall n \geq 1, \phi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \phi_x(t) dt \leq \phi_x(n)$$

D'où en changeant d'indice dans la première inégalité

$$\forall n \geq 2 : \int_n^{n+1} \phi_x(t) dt \leq \phi_x(n) \leq \int_{n-1}^n \phi_x(t) dt$$

4. On fait la somme de 2 à N

$$\forall N \geq 2 : \int_2^{N+1} \phi_x(t) dt \leq \sum_{n=2}^N \phi_x(n) \leq \int_1^N \phi_x(t) dt$$

et donc

$$\forall x > 0, \forall N \geq 2 : \int_2^{N+1} \phi_x(t) dt + \phi_x(1) \leq \sum_{n=1}^N \phi_x(n) \leq \int_1^N \phi_x(t) dt + \phi_x(1)$$

On a

$$\int_1^N \phi_x(t) dt = \ln\left(\frac{N}{N+x}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) \text{ de limite } \ln(1+x) \text{ si } N \text{ tend vers } +\infty$$

et

$$\int_2^{N+1} \phi_x(t) dt = \ln\left(\frac{N+1}{N+1+x}\right) - \ln\left(\frac{2}{2+x}\right) \text{ de limite } \ln\left(\frac{2+x}{2}\right) \text{ si } N \text{ tend vers } +\infty$$

On peut donc faire tendre N vers $+\infty$

$$\ln\left(\frac{2+x}{2}\right) + s_1(x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + s_1(x)$$

5. ce qui prouve déjà que $S(x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$.

De plus

$$\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \ln(x)$$

et

$$\ln\left(\frac{2+x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \ln(x) - \ln(2) + \frac{2}{x} + o(1) \sim \ln(x)$$

reste $s_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ de limite finie 1 si x tend vers $+\infty$. Elle est donc négligeable devant $\ln(x)$

$$\boxed{S(x) \sim_{+\infty} \ln(x)}$$

on a donc une branche parabolique horizontale.

troisième partie

1.

1. On sait que sur D on a la relation : $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ et donc $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{x+1}$. Donc si S est dérivable en $x+1 \neq 0$ alors S est dérivable en x et :

$$S'(x) = S'(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

On a donc déjà la dérivabilité (et plus seulement la dérivabilité à droite) en 0 et donc $S'(0) = S'(0^+) = \frac{\pi^2}{6}$

Pour les $x < 0$ une récurrence montre la dérivabilité et la formule de calcul $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ sur $] -p, -p+1[$

- si $p = 0$, $] -p, -p+1[\subset \mathbb{R}^+$ et la propriété est vérifiée.
- si S est dérivable sur $] -p, -p+1[$ et si $\forall x \in] -p, -p+1[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ alors
 $-\forall x \in] -p-1, -p[$, $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{x+1}$ est dérivable en x et

$$\begin{aligned} S'(x) &= S'(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+x)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S \in C^1(D, \mathbb{R}) \text{ et } S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}}$$

S est donc croissante sur chaque intervalle $] -p, -p+1[$ (mais pas sur D entier)

- $S'(-1/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Comme au I.3 on remarque que l'on a seulement les termes impairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et donc $S'(-1/2) = \frac{\pi^2}{2}$

- $S'(1/2) - S'(-1/2) = -4$ donc $S'(1/2) = \frac{\pi^2}{2} - 4$

2. D'après 3.1 on a $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{x+1}$. Si x tend vers -1 , $x+1$ tend vers 0 et donc par continuité de S en 0 $S(x+1)$ tend vers $S(0) = 0$.

$$S(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{-1}{x+1} + o(1) \sim \frac{-1}{x+1}$$

On recommence en -2 :

$$S(x) = S(x+1) - \frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow -2}{\sim} \frac{-1}{x+2}$$

car $\frac{1}{x+1}$ admet en -2 une limite finie et est donc négligeable devant $\frac{1}{x+2}$

Une récurrence donne alors

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow -p}{\sim} \frac{-1}{x+p}}$$

car on ajoute à chaque fois une quantité de limite infinie et une quantité de limite finie.