1. PROBLEME D'après une épreuve de la banque commune des écoles de commerce 2005

On veut étudier la fonction S définie par :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

On notera $s_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
On admettra que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Vous terminerez impérativement l'étude en faisant une figure représentant le graphe de S , ou les éléments du graphe que vous aurez trouvés.

PARTIE 1

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
   1. On admet qu'il existe une constante γ telle que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} =_{n->+\infty} \ln(n) + \gamma + o(1)$ (voir sujet précédent)
   2. en déduire $\lim_{+\infty} \left(\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \right)$
2. Soit

$$V = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right)$$

   1. Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1} \right)$ converge.
   2. Montrer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$
   3. En déduire la valeur de V

PARTIE 2 domaine de définition , étude si $x > 0$

On notera $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers strictement négatifs : $p \in \mathbb{Z}^- \Leftrightarrow p \in \mathbb{Z}$ et $p < 0$

1. **domaine de définition**

   Montrer que le domaine de définition de S est $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$
2. **quelques valeurs particulières:**

   Calculer $S(0), S(1)$ et $S(-1/2)$
3. **une relation vérifiée par la somme:**
   1. Montrer : $\forall x \in D$, $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$
   2. Calculer $S(2)$et $S(1/2)$
4. **Continuité de la somme sur $\mathbb{R}^+$**
   1. Calculer : $\lim_{x->+\infty} (s_n(x))$. La série $\sum s_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$
   2. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. etudier la convergence normale sur $[a, b]$
   3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

5. **dérivation sur $\mathbb{R}^+$**

    1. Justifier que $s_n \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et calculer s_n' sur $\mathbb{R}^+$
    2. Montrer que $S \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et calculer S' comme somme d'une série.
    3. Quelles sont les variations de S sur $\mathbb{R}^+$
    4. Calculer $S'(0^+), S'(1)$ et $S'(2)$

6. **Etude en $+\infty$**

    On prend $x > 0$

    1. Soit la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par
    $$\phi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$$
    2. calculer une primitive de ϕ_x
    3. Montrer l'encadrement :
    $$\forall n \geq 2 : \int_n^{n+1} \phi_x(t)dt \leq \phi_x(n) \leq \int_{n-1}^{n} \phi_x(t)dt$$
    4. En déduire un encadrement de $S(x)$
    5. Donner la limite et un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

PARTIE 3 : étude si $x \leq 0$

1. **Dérivabilité sur le domaine de définition:**

    1. En utilisant la relation du II.3.1 montrer que S est dérivable sur D et que :
    $$\forall x \in D \ , \ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$
    2. calculer $S'(-1/2)$ et $S'(1/2)$

2. **Branche infinie**

    Déterminer la limite et un équivalent de S au voisinage de -1

    Plus généralement pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la limite et un équivalent de S au voisinage de -p

3. **Et n'oubliez pas le graphe.**