

PC2 DS1 éléments de solutions. EXERCICE 1

concours ATS 2007 (partiel)

1. Le courbe est bien définie et même C^∞ sur \mathbb{R} .

•

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(-t) = -x(t) , y(-t) = -y(t)$$

donc $\mathcal{L} - \{M(\infty)\}$ est invariant par symétrie par rapport à 0

• On a $M(\infty) = (0, 0)$ par passage à la limite. Ce point est aussi invariant par rapport à O

D'où :

la courbe est invariante par symétrie par rapport à 0

2. •

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : x(1/t) = y(t) , y(1/t) = x(t)$$

donc $\mathcal{L} - \{M(\infty), M(0)\}$ est invariant par symétrie rapport à la première bissectrice ($y = x$)

• $M(0)$ et $M(\infty)$ sont aussi invariants par cette symétrie.

la courbe est invariante par symétrie par rapport à la droite $y = x$

3.

$$\forall t \in [0, 1] \quad x'(t) = \frac{2t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2} , y'(t) = \frac{2(1-3t^4)}{(1+t^4)^2}$$

Sur $[0, 1]$ x est croissante et y admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
$x(t)$	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$	1
$y(t)$	0	$\frac{16}{17}$	$\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$	1
$x'(t)$	0	$\frac{376}{289}$	$\sqrt{3}$	1
$y'(t)$	2	$\frac{416}{289}$	0	-1

4. En lien avec le tableau de variations on a le tableau de valeurs :

On remarque aussi que tous les points sont réguliers.

5. On a $\frac{y(t)}{x(t)} = t^{-2}$. donc $\lim_{+\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = 0$ (tangente horizontale en $M(\infty) = O$) et $\lim_0 \left(\frac{y}{x}\right) = +\infty$ (tangente verticale en $M(0) = O$)

6. voir figure

7. On doit résoudre dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ le système :

$$\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

- si $x \neq 0$ la première équation donne $x^2 + y^2 = 1$, la seconde est alors vérifiée.
- si $y \neq 0$ la seconde équation donne $x^2 + y^2 = 1$, la première est alors vérifiée.
- $x = y = 0$ n'est pas possible

L'ensemble des points invariants est le cercle $x^2 + y^2 = 1$

8. On a pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} X(t) = \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{t}{2} \\ Y(t) = \frac{y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{1}{2t} \end{cases} \quad \text{donc } X(t)Y(t) = \frac{1}{4} . \text{ L'image est incluse dans l'hyperbole}$$

d'équation $X.Y = \frac{1}{4}$

9. Réciproquement si (X, Y) est un point de cette hyperbole on pose $t = 2X$ et on vérifie que $f(M(2X)) = (X, Y)$

$$\boxed{\text{L'image de } \mathcal{L} - \{0\} \text{ par } f \text{ est l'hyperbole } XY = \frac{1}{4}}$$

EXERCICE 2

concours PT 2007 Math B (partiel)

1. On a

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = e^{2\theta} \vec{u}_\theta$$

La courbe est C^∞ sur \mathbb{R} . La dérivée donne :

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = e^{2\theta} (2\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta)$$

Ce vecteur est toujours non nul, le point est donc toujours régulier.

Dans le repère tournant on a en notant $V = (u_\theta, T)$, $\tan(V) = 1/2$, et donc $\alpha = (i, T) = \theta + \arctan(1/2)$. La pente demandée est donc $\tan(\alpha) = \tan(\theta + V) = \frac{\tan(\theta) + \tan(V)}{1 - \tan(\theta)\tan(V)}$

$$\boxed{\text{la pente est } \frac{2 \tan(\theta) + 1}{2 - \tan(\theta)}}$$

le calcul est valable si $\theta + V \neq \pi/2 \text{ [}\pi\text{]}$ soit $\tan(\theta) \neq 2$. dans ce cas la tangente est verticale.

remarque : On a aussi $\tan(\alpha) = \frac{2 \sin(\theta) + \cos(\theta)}{2 \cos(\theta) - \sin(\theta)}$

2.

$\lim_{+\infty}(\rho) = +\infty$: branche infinie de type spirale

$\lim_{-\infty}(\rho) = 0$: l'origine est un point limite.

3. D'après le calcul de la dérivée

$$\frac{ds}{d\theta}(\theta) = \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) \right\| = e^{2\theta} \sqrt{5}$$

donc $L = \int_0^\pi \sqrt{5} e^{2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} [e^{2\theta}]_0^\pi$

$$\boxed{L = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2\pi} - 1)}$$

4. En polaire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(\theta) d\theta$. Donc ici $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{4\theta} d\theta$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{e^{4\pi} - 1}{8}}$$

5. $\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)}{\left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) \right\|} = \frac{e^{2\theta} (2\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta)}{e^{2\theta} \sqrt{5}} = \frac{(2\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta)}{\sqrt{5}}$ et $\vec{N} = R_{\pi/2}(\vec{T}) = \frac{-\vec{u}_\theta + 2\vec{v}_\theta}{\sqrt{5}}$

6. On a $\alpha = \theta + \arctan(1/2)$ donc la courbure $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = 1 \cdot \frac{1}{e^{2\theta} \sqrt{5}}$

$$\boxed{R = e^{2\theta} \sqrt{5}}$$

7. voir figure

Exercice 3

Concours PT 2006

épreuve B (partiel)

Partie A

- La courbe proposée est bien définie sur $[0, \pi/4]$, continue mais pas C^1 sur le segment, C^∞ sur $[0, \pi/4[$
 ρ est nul en $\pi/4$: donc point d'arrêt le pôle avec une tangente d'angle polaire $\pi/4$ (la continuité suffit pour la tangente au pôle en polaire)

Pour $\theta \in [0, \pi/4[$

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = \frac{-\sqrt{2} \sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} u_{i\theta} + \sqrt{2 \cos(2\theta)} v_\theta$$

On a donc $\rho(0) = \sqrt{2}$, $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = \sqrt{2} v_\theta$: point régulier avec une tangente verticale.

On peut regarder aussi $\rho(\pi/6) = 1$, $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\pi/6) = -\sqrt{3} u_\theta + v_\theta$ donc $\tan(V) = \sqrt{3}/3$, $V = \pi/6$

D'où l'allure du graphe.

- On a en polaire :

$$\begin{aligned} MF^2 &= (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2x + 1 = \rho^2 - 2\rho \cos(\theta) + 1 \\ MF'^2 &= \rho^2 + 2\rho \cos(\theta) + 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (MF.MF')^2 &= (\rho^2 - 2\rho \cos(\theta) + 1) (\rho^2 + 2\rho \cos(\theta) + 1) \\ &= ([\rho^2 + 1] - 2\rho \cos(\theta)) ([\rho^2 + 1] + 2\rho \cos(\theta)) \\ &= [\rho^2 + 1]^2 - 4\rho^2 \cos^2(\theta) \\ &= [2 \cos(2\theta) + 1]^2 - 8 \cos(2\theta) \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) \\ &= 4 \cos^2(2\theta) + 4 \cos(2\theta) + 1 - 4 \cos(2\theta) - 4 \cos^2(2\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

on a bien vérifié :

$$\boxed{MF.MF' = 1}$$

Remarque on a prouvé une implication (une inclusion) ,il n'y a pas de contradiction avec l'étude qui suit si $k = 1$

Partie B

- Le sujet est équivalent (comme $k > 0$) à :

$$MF^2.MF'^2 = k^2$$

donc à

$$\boxed{([1-x]^2 + y^2) \cdot ([1+x]^2 + y^2) = k^2}$$

- On cherche les points de Γ_k tels que $y = 0$. On a donc à résoudre :

$$(1-x)^2(1+x)^2 = k^2$$

On change k de membre et on factorise :

$$\begin{aligned} (1-x^2)^2 - k^2 &= 0 \\ (1-x^2-k)(1-x^2+k) &= 0 \end{aligned}$$

- $k < 1$: 4 points $(-\sqrt{k+1}, 0)$, $(-\sqrt{-k+1}, 0)$, $(\sqrt{-k+1}, 0)$, $(\sqrt{k+1}, 0)$
- $k = 1$: 3 points $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$
- $k > 1$: 2 points $(-\sqrt{k+1}, 0)$, $(\sqrt{k+1}, 0)$

3. (a) 2 méthodes possibles :

- revenir aux coordonnées

$$\begin{aligned} MF^2 + MF'^2 &= (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2 \\ &= 2OM^2 + OF^2 + OF'^2 \end{aligned}$$

- C'est un résultat plus général : Pour tout segment $[FF']$, si O est le milieu de FF' la relation est vérifiée :

On écrit $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF}$ donc

$$MF^2 = \|\overrightarrow{MF}\|^2 = \|\overrightarrow{MO}\|^2 + \|\overrightarrow{OF}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OF} \rangle$$

On a une relation symétrique pour MF'^2 . On fait la somme et les produits scalaires se simplifient car $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OF'}$ (hypothèse du milieu)

(b) : évident en développant le carré. (cette question n'est qu'un indice pour le (c))

(c) En identifiant les membres de gauche sachant $OF^2 = OF'^2 = 1$ et $MF.MF' = k$ on a

$$2OM^2 + 2 = (MF - MF')^2 + 2k$$

Mais d'après l'inégalité triangulaire $MF \leq MF' + FF'$ soit $MF - MF' \leq FF' = 2$. (dans un triangle la longueur d'un côté est comprise entre la somme et la différence des deux autres longueurs) D'où le résultat

$$\boxed{OM^2 \leq 1 + k}$$

La courbe Γ_k est bornée.

Si on ne pense pas à la propriété géométrique on dit que :

$$OM^2 \leq 1 + k \Leftrightarrow (MF - MF')^2 \leq 4$$

or

$$\begin{aligned} (MF - MF')^2 &= \left(\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\| \right)^2 \\ &= \|\overrightarrow{MF}\|^2 + \|\overrightarrow{MF'}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MF}\| \cdot \|\overrightarrow{MF'}\| \\ &\leq \|\overrightarrow{MF}\|^2 + \|\overrightarrow{MF'}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'} \rangle \quad (\text{Inégalité de Cauchy Schwarz}) \\ &= \|\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MF'}\|^2 \end{aligned}$$

4. D'après l'équation cartésienne de la courbe, elle est invariante par $x \rightarrow -x$ et par $y \rightarrow -y$. on a donc une symétrie par rapport à Oy , une par rapport à Ox et par composition une par rapport à O .

Mais je n'ai pas répondu complètement à la question : J'ai trouvé des symétries de la courbe. Je n'ai pas prouvé que ce sont les seules (il y a un article défini dans le sujet).

5. On a

$$\left([1-x]^2 + y^2 \right) \cdot \left([1+x]^2 + y^2 \right) = k^2$$

ce qui équivaut à

$$\left([1+x^2+y^2] - 2x \right) \left([1+x^2+y^2] + 2x \right) = k^2$$

soit (encore $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

$$[1+x^2+y^2]^2 - 4x^2 = k^2$$

soit (car tout est positif)

$$[1+x^2+y^2] = \sqrt{k^2 + 4x^2}$$

et donc (avec l'hypothèse $y \geq 0$:

$$\boxed{y = \sqrt{\sqrt{k^2 + 4x^2} - x^2 - 1}}$$

sur son domaine de définition (qui sera étudié à la question suivante)

6. (a) Le domaine de définition est l'ensemble des x tels que $\sqrt{k^2 + 4x^2} \geq x^2 + 1$. Les quantités étant toutes positives on peut élever au carré :

$$k^2 + 4x^2 \geq x^4 + 2x^2 + 1$$

ce qui équivaut à

$$k^2 \geq (x^2 - 1)^2$$

soit

$$1 - k \leq x^2 \leq k + 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } k \leq 1, D_k = [\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k}] \\ \text{si } k \geq 1, D_k = [0, \sqrt{1+k}] \end{array}}$$

- (b) La fonction ($x \rightarrow \sqrt{x}$) est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} . donc f_k est, par les règles usuelles, dérivable en tout réel x tel que $\sqrt{k^2 + 4x^2} - x^2 - 1 > 0$. En reprenant le calcul précédent, on obtient la dérivabilité sur

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } k \leq 1, D'_k =]\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k}[\\ \text{si } k > 1, D'_k = [0, \sqrt{1+k}[\end{array}}$$

Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= \frac{d(\sqrt{k^2 + 4x^2} - x^2 - 1)}{dx} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{k^2 + 4x^2} - x^2 - 1}} \\ &= \left(\frac{8x}{2\sqrt{k^2 + 4x^2}} - 2x \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{k^2 + 4x^2} - x^2 - 1}} \\ &= \frac{x(2 - \sqrt{k^2 + 4x^2})}{\sqrt{k^2 + 4x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{k^2 + 4x^2} - x^2 - 1}} \end{aligned}$$

L'étude aux bornes recouvre plusieurs cas :

- En $x = \sqrt{1+k}$: le dénominateur de f'_k tend vers 0 et le numérateur vers

$$\sqrt{1+k}(2 - \sqrt{k^2 + 4k + 1}) = \sqrt{1+k}(2 - |k+2|) = -k\sqrt{1+k} < 0$$

. donc la dérivée tend vers l'infini : non dérivable en $\sqrt{1+k}$, et même tangente verticale au graphe.

- En $x = \sqrt{k-1}$ si $k < 1$ on a de même une tangente verticale.
- En $x = 0$ si $k > 1$ la fonction est connue comme étant dérivable et $f'_k(0) = 0$
- En $x = 0$ si $k = 1$ on a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$

$$f'_1(x) = \frac{x(2 - \sqrt{1+4x^2})}{\sqrt{1+4x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{1+4x^2} - x^2 - 1}}$$

On prend un équivalent en éliminant les limites non nulles :

$$f'_1(x) \sim_0 \frac{x \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{\sqrt{1+4x^2} - x^2 - 1}}$$

et on continue avec D.L et équivalent $\sqrt{1+4x^2} - x^2 - 1 = (1+2x^2 + o(x^2) - x^2 - 1) = x^2 + o(x^2)$ et donc

$$f'_1(x) \sim_0 \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1 \text{ (car } x > 0 \text{)}$$

la fonction f_k est dérivable à droite en 0 de dérivée 1.

remarque : on peut aussi éliminer l'indétermination en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$f'_1(x) \sim_0 \frac{x \cdot \sqrt{\sqrt{1+4x^2} + x^2 + 1}}{1 \cdot \sqrt{1+4x^2} - (x^2 - 1)^2} = \frac{x \cdot \sqrt{\sqrt{1+4x^2} + x^2 + 1}}{1 \cdot \sqrt{2x^2 - x^4}}$$

- (c) et (d) $f'_k(x)$ est du signe de $(2 - \sqrt{k^2 + 4x^2})$ donc de celui de $4 - (k^2 + 4x^2)$ en multipliant par la quantité conjuguée

- si $k \geq 2$: $f'_k \leq 0$: fonction décroissante sur $[0, \sqrt{1+k}]$
- si $k < 2$; il faut situer $\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$ par rapport aux bornes de l'intervalle :
 - on a toujours $\frac{\sqrt{4-k^2}}{2} \leq \sqrt{k+1}$ car $\frac{4-k^2}{4} \leq (k+1) : k^2 + 4k \geq 0$
 - si $k < 1$ alors $\frac{\sqrt{4-k^2}}{2} \geq \sqrt{-k+1}$ car $\frac{4-k^2}{4} \geq (-k+1) : 4k - k^2 = k(4-k) \geq 0$

La fonction est donc croissante jusqu'à $\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$ puis décroissante.

7. voir figures