PROGRAMME n° 07 - semaine du 10/11/2008 au 15/11/2008

Le précédent (développements limités) + COURBES PLANES PARAMETREES

- *Fonctions vectorielles : brèves notions*

∗ Si $\vec{f}$, $\vec{g}$: $I \to \mathbb{R}^2$, sont des fonctions vectorielles dérivables ($I \subset \mathbb{R}$) et si $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est dérivable,
alors $\alpha.\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ et $\vec{f}.\vec{g} : I \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Det}(\vec{f},\vec{g}) : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et :

$\dfrac{d(\alpha(t)\vec{f}(t))}{dt} = \alpha'(t)\vec{f}(t) + \alpha(t)\vec{f}'(t)$	$\dfrac{d(\vec{f}(t).\vec{g}(t))}{dt} = \vec{f}'(t).\vec{g}(t) + \vec{f}(t).\vec{g}'(t)$
$\dfrac{d\left(\mathrm{Det}(\vec{f}(t),\vec{g}(t))\right)}{dt} = \mathrm{Det}(\vec{f}'(t),\vec{g}(t)) + \mathrm{Det}(\vec{f}(t),\vec{g}'(t))$	Rem : $\lVert\vec{f}\rVert : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t si $\lVert\vec{f}(t)\rVert \neq \vec{0}$ et $\dfrac{d(\lVert\vec{f}(t)\rVert)}{dt} = \dfrac{\vec{f}(t).\vec{f}'(t)}{\lVert\vec{f}(t)\rVert}$

Autrement dit : $\boxed{(\alpha\vec{f})' = \alpha'\vec{f} + \alpha\vec{f}'}$, $\boxed{(\vec{f}.\vec{g})' = \vec{f}'.\vec{g} + \vec{f}.\vec{g}'}$, $\boxed{\mathrm{Det}(\vec{f},\vec{g})' = \mathrm{Det}(\vec{f}',\vec{g}) + \mathrm{Det}(\vec{f},\vec{g}')}$.

∗ Rem : si $\lVert\vec{f}(.)\rVert$ est constant sur I, alors : $\forall t \in I$, $\vec{f}(t) \perp \vec{f}'(t)$.

- *Arcs paramétrés du plan* $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$

∗ Représentations paramétriques (M(t) $= \overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$: vecteur position).

Trajectoire $\Gamma = \vec{f}(I) = \{ M(t) \mid t \in I \}$.

Vecteurs **vitesse** $\overrightarrow{M'(t)} = \dfrac{d(\overrightarrow{OM}(t))}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et **accélération** $\overrightarrow{M''(t)} = \dfrac{d^2(\overrightarrow{OM}(t))}{dt^2} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

∗ Un point $M(t_0)$ est dit **régulier** si $\overrightarrow{M'(t_0)} \neq \vec{0}$.
Un point $M(t_0)$ est dit **stationnaire** (ou **singulier**) si $\overrightarrow{M'(t_0)} = \vec{0}$.

∗ Tangente en un point $M(t_0)$ d'un arc paramétré : c'est la limite des droites $(M(t_0)M(t))$ lorsque t tend vers t_0.
Si $M(t_0)$ est un point régulier, elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{M'(t_0)} \neq \vec{0}$.

Cas des points singuliers (où $\overrightarrow{M'(t_0)} = \vec{0}$) : étude de $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ *(limite des pentes des cordes)* ou de

$\lim\limits_{t \to t_0} m(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)$ *(limite des pentes m(t) des tangentes)* ou calcul d'un DL($h \to 0$) de $M(t_0+h)$.

∗ Allure (locale) d'un arc au voisinage d'un point : (sur des exemples) à l'aide de développements limités, étude de points d'inflexion et de rebroussement.
Rem : les points d'inflexion sont ceux qui « *annulent en changeant de signe* » la quantité
$m'(t) = \dfrac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}$ (i.e) (extremum, changement de variations pour la pente des tangentes).

Rem : cela revient à étudier le changement de signe de $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \det(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)})$.

∗ Etude des branches infinies (branche infinie, direction asymptotique, asymptote, position « locale » par rapport à une asymptote à l'aide de développements limités).

∗ Etude globale : domaine de définition, réduction du domaine d'étude par périodicité, par symétrie. Variations. Points stationnaires. Branches infinies. Points multiples si c'est possible.

Prévisions pour le n° 8 : équations différentielles linéaires du 1^er^ ordre.