1 Les basiques

Exercice 1 *Résoudre , m désigne un réel quelconque, x est l'inconnue cherchée:*

$$\begin{array}{ll} (E_1) : x-1=\sqrt{x+2} & (E_2) : x-1\leq\sqrt{x+2} \\ (E_3) : \sqrt{2x+m}=x+1 & (E_4) : \sqrt{2x+m}\leq x+1 \\ (E_5) : \sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=3 & (E_6) : \sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=m \end{array}$$

Exercice 2 *Simplifier* $a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}}$ *pour* $a>1$.

Exercice 3 *Résoudre l'équation* $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$

Exercice 4 *Résoudre* $2^{x^3}=3^{x^2}$

Exercice 5 *Résoudre* $\left\{\begin{array}{ll} \ln x+\ln y & =\ln 2 \\ x+y & =4 \end{array}\right.$ *et* $\left\{\begin{array}{ll} \ln xy & =5 \\ (\ln(x)\ln(y))^2 & =36 \end{array}\right.$

Exercice 6 *Résoudre* $e^x+e^{1-x}-e-1=0$

Exercice 7 *Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une expression plus simple.*
(1) $e^{\frac12\ln\left(x^2\right)}$, (2) $e^{\frac12\ln\left(1+x^2\right)}$, (3) $x-\ln(xe^x)$, (4) $x^{\frac{1}{\ln(x)}}$, (5) $xe^{1-\ln(x)}$

Exercice 8 *Déterminer les domaines de définition, de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :*
$f_1(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $f_2(x)=x^{\ln x}$, $f_3(x)=\ln x^{\ln x}$, $f_4(x)=x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^{1+x}$
Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.

Exercice 9 *Déterminer le domaine de définition de* $f(x)=\ln\ln x$. *Calculer sa dérivée.*
On définit la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *par* $f_0(x)=x$, *et* $\forall k\in\mathbb{N}$, $f_{k+1}(x)=\ln(f_k(x))$. *Déterminer le domaine de définition de* f_k. *Exprimer la dérivée de* f_{k+1} *en fonction des* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 *Exprimer* $\operatorname{ch}3x$ *comme un polynôme en* $\operatorname{ch}x$ *et* $\operatorname{sh}2x$ *à l'aide de* $\operatorname{ch}x$ *et* $\operatorname{sh}x$.

Exercice 11 *Soit* $f(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$. *Déterminer l'ensemble de définition de* f. *Montrer que* $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}3x}{\operatorname{sh}2x}$, *puis exprimer* f *uniquement à l'aide de la fonction* sh. *Etudier les variations de* f.

Exercice 12 *Calculer* $2\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$ *lorsque* $x=\dfrac{1}{2}\ln 3$.

Exercice 13 *Simplifier la fonction* $\operatorname{arg\,th}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

Exercice 14 *Montrer que pour tout* x *réel et tout entier* $n\in\mathbb{Z}$, $\left(\dfrac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}\right)^n=\dfrac{1+\operatorname{th}nx}{1-\operatorname{th}nx}$.

Exercice 15 *Simplifier les expressions suivantes :* (a) $\operatorname{sh}^2x\cos^2y+\operatorname{ch}^2x\sin^2y$ $\quad(b)$ $\operatorname{ch}^2x\cos^2y+\operatorname{sh}^2x\sin^2y$

Exercice 16 *Simplifier la fonction* $\operatorname{arg\,sh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 17 *Que pensez vous de la fonction* $f(x)=\operatorname{arg\,th}x-\operatorname{arg\,th}\dfrac{1}{x}$?

Exercice 18 *Résoudre* $\operatorname{arg\,th}x=\operatorname{arg\,ch}\dfrac{1}{x}$.

Exercice 19 *Résoudre* $\operatorname{arg\,sh}(x-1)=\operatorname{arg\,ch}\sqrt{x}$.

Exercice 20 *Calculer* $\operatorname{sh}(\ln 2)$ *et* $\operatorname{sh}(\ln 3)$, *puis* $\displaystyle\int_0^{\frac34}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ *et* $\displaystyle\int_{\frac34}^{\frac43}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ *en posant* $x=\operatorname{sh}t$.

Exercice 21 *Calculer* $\operatorname{ch}\ln 2$, *puis* $\displaystyle\int_1^{\frac54}\frac{u+\sqrt{u^2-1}}{\sqrt{u^2-1}}du$

2 Les Techniques

Exercice 22 *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, *en déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *diverge vers* $+\infty$.

Exercice 23 *Résoudre* $\begin{cases} e^x e^y &= a \\ xy &= 1 \end{cases}$ *d'inconnues* $x \leq y$ *réelles, en fonction du paramètre réel* a.

Exercice 24 *Montrer que*

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R},\ \operatorname{arg\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ \forall x &\geq 1,\ \operatorname{arg\,ch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \forall x &\in \left]-1+1\right[,\ \operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Exercice 25 *Pour* a *et* b *réels et* $n \in \mathbb{N}$, *calculer* $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ *et* $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$ *(utiliser* $C+S$ *et* $C-S$*)*

Exercice 26 *Montrer que* $\forall x \neq 0,\ \operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th} 2x} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$.
En déduire la valeur de la somme $S_n = \operatorname{th} x + 2\operatorname{th} 2x + 4\operatorname{th} 4x + \cdots + 2^{n-1}\operatorname{th} 2^{n-1}x$

Exercice 27 *Discuter l'équation* $e^x(k+x) = e^{-x}(k-x)$ *d'inconnue* x *et de paramètre* k.

Exercice 28 *Montrer que si* $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *alors* $\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\operatorname{th} x = \sin y$ *et* $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\cos y}$ *(et que vaut* $\operatorname{sh} x$ *?)*

Exercice 29 *Simplifier la fonction* $\operatorname{arg\,th}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

Exercice 30 *Montrer que* $\forall (x,y) \in \left]-1,1\right[^2$, $\operatorname{arg\,th}(x) + \operatorname{arg\,th} y = \operatorname{arg\,th}\dfrac{x+y}{1+xy}$ *(justifier que* $\dfrac{x+y}{1+xy} \in \left]-1,1\right[$ *si* x *et* y *sont dans* $\left]-1,1\right[$*)*

Exercice 31

1. *Existe-t-il une fonction* $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\operatorname{ch} x) = e^x$
2. *Existe-t-il une fonction* $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(e^x) = \operatorname{ch} x$

Exercice 32 *Calculer* $\operatorname{th}(\ln\sqrt{a})$ *et puis* $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{2}} \frac{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh} t}\,dt$ *en posant* $u = \operatorname{th} t$

3 Les olympiques

Exercice 33 (Timisoara Mathematics Review) *Résoudre le système*

$$\begin{cases} \ln(2xy) &= \ln(x)\ln(y) \\ \ln(yz) &= \ln(y)\ln(z) \\ \ln(2zx) &= \ln(z)\ln(x) \end{cases}$$

Exercice 34 (Crux Mathematicorum) *Montrer que pour* $x > 0$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{th} x < \sqrt{1-e^{-x^2}}$$

Exercice 35 (Olympiades du Viet Nam 1999) *Résoudre le système*

$$\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y} &= 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right) &= 0 \end{cases}$$