1 Les basiques

Exercice 1 *Soient f et g deux fonctions définies sur I, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une extrémité de I. Monter que*

1. $\exp(f) \underset{a}{\sim} \exp(g) \Longleftrightarrow f - g \xrightarrow[x\to a]{} 0$
2. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ *ou* $+\infty$ *avec* $L \neq 1$ *alors* $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$
3. *Que dire de* $\ln f$ *si* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ *?*

Exercice 2 *Donner des équivalents des fonctions suivantes :*
$\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)}$ *en* 0, $\dfrac{\sin(x)(e^x-1)}{\cos(x)-1}$ *en* 0, $\dfrac{\mathrm{sh}(x)(\mathrm{ch}(x)-1)}{\sin(x)(\cos(x)-1)}$ *en* 0 $\dfrac{5^x-1}{\sin(x)}$ *en* 0,
$\dfrac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x}+x^2}$ *en* 0^+ *et en* $+\infty$, $\dfrac{1+x^\alpha}{x^\beta}$ *où* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *en* 0 *et* $+\infty$, $\dfrac{\ln(x)+\ln^2(x)}{\sqrt{\ln(x)}+\sqrt[3]{\ln(x)}}$ *en* $+\infty$,
$\dfrac{e^x+x+\ln(|x|)}{x+\sqrt{|x|}}$ *en* $0, +\infty$ *et* $-\infty$, $\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ *en* 1
$\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{x^3+1-\cos(x)}{(x^2-2x)\tan(3x)}$ *en* 0, $\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{e^x-\cos(x)}$ *en* 0, $e^{\sin(x)}-e$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$,
$\ln(\cos(x))$ *en* 0, $\dfrac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos^2(x)}$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$, $(x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$ *en* $+\infty$, $e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$ *en* $+\infty$,
$\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *en* 0 *et* $+\infty$ $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ *en* 0 *et* $+\infty$,

Exercice 3 *Déterminer les limites suivantes:*
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^2\tan(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\exp\left(\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right)}$,
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{2^x-1}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\mathrm{ch}(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$
$\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+x-2)\tan\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$ $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\tan\left(\tfrac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+1)-\sqrt{x^3+2}$

Exercice 4 *Donner alors un équivalent en* 0 *de* $\sqrt[5]{\dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}}$ *et de* $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}$

Exercice 5 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(2x)}{2\sin(x)-\sqrt{2}}$

2 Les techniques

Exercice 6 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(2+\cos(x))^{\mathrm{cotan}^2(x)}$

Exercice 7 *Etudier la continuité (et prolonger) de* $f(x)=\sin(x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$, $g(x)=(1+\ln(x))^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Exercice 8 *Soit* $a\in\mathbb{R}$ *et* $f_a(x)=\left(x^2-ax+1\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

1. *Donner un équivalent de* f_a *en* $x=3$.
2. *Pour quelle valeur de* a *la fonction est-elle prolongeable par continuité en* $x=3$ *? Quelle est alors la valeur de* $f_a(3)$ *?*
3. *Plus généralement, si* $P\in\mathbb{R}[X]$ *est un polynôme à coefficients réels, à quelle condition sur* P *la fonction* $f(x) = P(x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$ *est-elle prolongeable en* $x=3$ *? Exprimer alors* $f(3)$ *en fonction de* $P'(3)$.