PCSI2 - Programme de kholle : semaine 6 (du 20 Octobre au 26 Octobre)

Chapitre 4 : Géométrie dans l'espace.

Repères cartésiens, orthonormaux. Produit scalaire (rappel rapide des propiétés), expression en BON. Produit vectoriel dans l'espace orienté (défini par $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ normal unitaire oriente le plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$). Propriétés, condition de colinéarité, expression en BOND (pour le calcul, je passe par le moyen mnémotechnique $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & x & x' \\ \overrightarrow{j} & y & y' \\ \overrightarrow{k} & z & z' \end{vmatrix}$. qui permet d'assimiler le développement par rapport à une colonne du déterminant) Produit mixte ou déterminant en BOND ($[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{w}$). Propriétés (dont invariance par permutation circulaire). Caractérisation des bases. Expression en BOND du produit mixte. Définition du déterminant d'ordre 3. Propriétés des lignes et des colonnes. Développement par rapport à une colonne ou une ligne. Exemple de calculs de déterminant d'ordre 3 (les khôlleurs peuvent poser des calculs de déterminants, Pour les déterminants, je n'ai pas parlé de la règle de Sarrus que je préfèré éviter pour l'instant). Formules de Cramer, résolution de système 3×3 par les formules de Cramer.
Eléments de géométrie analytique : représentation paramétrique d'une droite, système d'équations cartésiennes. Plan dans l'espace, équation d'un plan défini par un point et deux vecteurs, par trois points, ou par un point et un vecteur normal. Distance d'un point à une droite, d'un point à un plan. Perpendiculaire commune. Sphère dans l'espace (intersection sphère droite ou plan).

Chapitre 5 : Relations de comparaisons, développements limités

Relations de comparaisons : Fonction négligeable devant une autre, fonctions équivalentes (définition par les quotients, $f = \underset{a}{o}(g) \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 0$, $f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 1$). Propriétés, produit et quotient d'équivalents. Cas des sommes ($f+g\sim f$ si $g = o(f)$). Deux fonctions équivalentes sont de même signe au voisinage du point (admis car je n'ai pas de définition précise de la limite). Equivalents usuels. Calcul de limite par des équivalents.

Exercices type

- Calculer, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.
- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{arg\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $\forall x \geq 1$, $\operatorname{arg\,ch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $\forall x \in]-1+1[$, $\operatorname{arg\,th} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
- Résoudre $\arctan(x) + \arctan\left(x^3\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.
- Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de l'espace avec $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$, résoudre l'équation $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ d'inconnue $\overrightarrow{x}$. . Rappel donné: la formule du double produit vectoriel :
$\overrightarrow{a}\wedge\left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{c}$
- Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.
- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, soit D d'équations $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$, donner l'équation de P passant par $A=(1,0,2)$ et contenant D.
- Donner un système d'équations de la perpendiculaire commune à D passant par $A=(2,3,-1)$ dirigée par $\overrightarrow{v} = (-1,6,2)$ et à D' passant par $B=(1,1,-2)$ et dirigée par $\overrightarrow{w} = (2,1,-4)$ dans le ROND $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.
- Donner un équivalent de $e^{\sin(x)} - e$ en $\dfrac{\pi}{2}$.