PCSI2 - Programme de kholle : semaine 7 (du 6 au 15 novembre)

Chapitre 5 : Relations de comparaisons, développements limités

Relations de comparaisons : Fonction négligeable devant une autre, fonctions équivalentes (définition par les quotients, $f = \underset{a}{o}(g) \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 0$, $f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 1$). Propriétés, produit et quotient d'équivalents. Cas des sommes ($f+g \sim f$ si $g = o(f)$). Deux fonctions équivalentes sont de même signe au voisinage du point (admis car je n'ai pas de définition précise de la limite). Equivalents usuels. Calcul de limite par des équivalents.

Développements limités : Définition, unicité de la partie régulière. La partie principale donne l'équivalent. Si f admet un DL_1 en a, alors f est prolongeable par continuité en a, et le prolongement est dérivable. Formule de Taylor-Young (admise), DL usuels. Somme, produit, composée et quotient (en utilisant $\dfrac{1}{1+u}$). Intégration d'un DL (admis). Utilisation des DL pour : l'étude locale (position par rapport à la tangente), la détermination d'asymptotes (sur des exemples). Pas de théorie des développements asymptotiques (on se ramène en 0 avec $h = \dfrac{1}{x}$ pour un DL en $+\infty$).

L'object

Vérifier que les élèves connaissent les DL usuels (en demander 3 par élèves):
$\dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{1-x}, e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \ln(1-x), (1+x)^\alpha, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \arctan(x)$ à un ordre quelconque et $\tan x$ et $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.

L'objectif est de vérifier que les élèves savent calculer un DL à un ordre faible et l'utiliser dans un contexte de prolongement ou de recherche d'asymptote.

Exercices type

- Donner un équivalent de $e^{\sin(x)} - e$ en $\dfrac{\pi}{2}$.
- Donner le développement limité à l'ordre 5 de la fonction $\tan x$.
- Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, prolonger f en $x = 0$ et placer la courbe par rapport à la tangente.
- Donner le développement limité à l'ordre 2 en $x = 1$ de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.