PCSI2 - Programme de kholle : semaine 8 (du 17 au 22 novembre)

Chapitre 5 : Relations de comparaisons, développements limités

Développements limités : Définition, unicité de la partie régulière. La partie principale donne l'équivalent. Si f admet un DL_1 en a, alors f est prolongeable par continuité en a, et le prolongement est dérivable. Formule de Taylor-Young (admise), DL usuels. Somme, produit, composée et quotient (en utilisant $\frac{1}{1+u}$). Intégration d'un DL (admis). Utilisation des DL pour : l'étude locale (position par rapport à la tangente), la détermination d'asymptotes (sur des exemples). Pas de théorie des développements asymptotiques (on se ramène en 0 avec $h = \frac{1}{x}$ pour un DL en $+\infty$).

Chapitre 6 : Courbes paramétrés.

Arc paramétré (vague définition, mais j'ai sensiblisé au fait que l'arc ne se résume pas au support) . Dérivée de $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}$, $\left\|\overrightarrow{f}\right\|$, Det $\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right)$. Point régulier, tangente en un point régulier. Branches infinis (notion de BPDA...), tracé du support. Pour les points stationnaires: Etude locale par les DL, j'ai indiqué que la tangente a pour pente $\lim \frac{y(t)}{x(t)}$ si la limite existe$\cdots$).
De plus j'ai fait des exemples de recherche de point double.
En particulier j'utilise le plan suivant :

-Etude de domaine de définition

-Recherche des symétries (j'ai fait plusieurs exemples, en particulier l'astroïde étudiée sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$)

-Branches infinies (Bpda, asymptotes, positions par rapport à l'asymptotes$\cdots$), et si on peut, on place quelques points intéressants (par exemples les points où la courbe coupe les axes en indiquant les valeurs du paramètre).

-Tracé probable du support de la courbe et tableau des variations prévus pour x et y compte tenu des branches infinies.

-Variations de x et y et confirmation des hypothèses précédentes (en vérifiant la cohérence). Etude éventuelle des points stationnaires.

-Tracé définitif du support.

L'objectif est simple : savoir tracer le support (ou avoir une idée avec les branches infinies) d'un arc paramétré.

Vérifier que les élèves connaissent les DL usuels
$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}, e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \ln(1-x), (1+x)^\alpha, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \arctan(x)$ à un ordre quelconque et $\tan x$ et $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.
L'objectif est de vérifier que les élèves savent calculer un DL à un ordre faible et l'utiliser dans un contexte de prolongement ou de recherche d'asymptote.

Exercices type

▶ Donner le développement limité à l'ordre 5 de la fonction $\tan x$.

▶ Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, prolonger f en $x = 0$ et placer la courbe par rapport à la tangente.

▶ Donner le développement limité à l'ordre 2 en $x = 1$ de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.

▶ Donner l'allure locale en $t = 1$ de l'arc paramétré par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3t(2-t) \\ y(t) = 4t - t^4 \end{array}\right.$.

▶ Déterminer les coordonnés du point double de l'arc paramétré défini par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{array}\right.$

▶ Eudier les branches infinies de l'arc paramétré défini par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t^2} \end{array}\right.$