CENTRALE 2001 PC Math2

On notera B_c la base canonique de V . Sauf précision contraire l'endomorphisme associée à une matrice sera noté en utilisant la même lettre minuscule : par exemple $A = Mat_{B_c}(a)$.

PARTIE 1

1. A

1.1. A

Soit (x, y) dans $V \setminus \{0_V\}$.

- Si (x, y) est un système lié alors comme x et y sont non nuls il existe un scalaire λ non nul tel que $y = \lambda x$. La matrice λI_n (homothétie de rapport λ) convient .
- Si (x, y) est libre On peut compléter en une base $B = (x, y, e_3, \cdots e_n)$. On prend a tel que

$$Mat_B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  a est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $(x - y)$. Alors $A = Mat_{B_c}(a)$ est solution du problème.
- Procédons par l'absurde en considérant W un sous espace vectoriel de V stable par $GL_n(\mathbb{C})$ non réduit à zéro (donc $\exists x \in W, x \neq 0_V$) et non égal à V $(\exists y \in V - W$ donc $y \neq 0_V)$ .D'après la construction précédente il existe une matrice A telle que $Ax = y$ et donc une matrice A qui ne laisse pas W stable.

$\boxed{\text{P6 est vérifiée}}$

1.2. A

P_1 fausse : comme $n > 1$ toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ est de rang $n \neq 1$
P_2 vraie : I_n est de rang n dans $GL_n(\mathbb{C})$
P_3 vraie
P_4 fausse :tout sous espace vectoriel doit contenir la matrice nulle qui n'est pas inversible
P_5 vraie : le produit de deux matrices inversibles est inversible.
P_6 fausse : cf ci dessus

2. B

2.1. B

Pour tout T de $\mathcal{L}$ $\quad Te_n = t_{n,n}.e_n$. Par suite $W = vect(e_n)$ est un sous espace vectoriel stable autre que $\{0_V\}$ et V (toujours car $\dim(V) > 0$) et

$\boxed{P_6 \text{ est fausse.}}$

2.2. B

P_1 vraie :$E_{1,1}$ est triangulaire inférieure et de rang 1
P_2 vraie : I_n est de rang n et triangulaire inférieur
P_3 vraie
P_4 vraie :le critère de sous espace vectoriel se rédige sans problème
P_5 vraie : le produit de matrices se rédige sans problème
P_6 :fausse

3. C

3.1. C

On se place dans l'hypothèse où $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel contenant I et ne contenant pas de matrice de rang 1 et avec $n = 2$. Alors pour tout élément A de $\mathcal{L}$,et tout complexe λ, $A - \lambda I$ est dans $\mathcal{L}$ de rang différent de 1 .

$$\boxed{\text{Le rang de } A - \lambda I \text{ est donc 0 ou 2.}}$$

Si le rang est 2 on a alors $A - \lambda I$ est inversible et λ n'est pas valeur propre de A. Or A admet toujours une valeur propre dans les complexes. Donc $\exists \lambda_0$, $rg(A - \lambda_0 I) \neq 2$.
Donc le rang est nul et $A = \lambda_0 I$.

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{L} \text{ est une homotétie vectoriel}}$$

Réciproquement les matrices scalaires sont dans $\mathcal{L}$ (colinéaire à I_2)

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est l'ensemble des homothéties vectorielles}}$$

3.2. C

Si P_6 est vérifiée , comme toute droite est stable par une homothétie ,$\mathcal{L}$ ne contient pas d'homotétie. on ne peut pas se trouver dans le cas précédent et P_1 est fausse .

$$\boxed{(n = 2, P_3, P_4, P_6) \Rightarrow P_1}$$

PARTIE II

remarque 1: par hypothèse $L - \{0_V\}$ contenant I est non vide . m est bien défini.
remarque 2 : *la base $(z_i)_{i=1}^m$ existe car $m = \dim(M_0(V)$, les (x_i) existe alors par définition d'une image et comme on a supposé $m \geq 2$ le vecteur x_2 existe donc aussi la matrice N_0. Tous les objets introduits par le sujet existent..*

4. A

Soit $W = \{Nz_1 / N \in \mathcal{L}\}$ Comme $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, on vérifie aisément que

- W est un sous espace vectoriel de V : image de $\mathcal{L}$ par l'application linéaire $N \mapsto Nz_1$
- W est stable par $\mathcal{L}$:Si $Nz_1 \in W$ et si $N' \in \mathcal{L}$ alors $N'(Nz_1) = (N'N)\, z_1 \in W$ car $\mathcal{L}$ est stable par produit interne donc $N'N \in \mathcal{L}$
- W est distinct de $\{0_V\}$ car W contient $I_n z_1 = z_1$.
- Par suite P_6 donne $\boxed{\{Nz_1/N \in \mathcal{L}\} = V}$.

Si $\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 = 0$ on a $\lambda_0 M_0 x_1 + \lambda_1 M_1 x_1 = \lambda_0 z_1 + \lambda_1 z_2$ .Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ car (z_1, z_2) est libre.

5. B

$M_0(V)$ est une l'image de l'espace vectoriel V par M_0 donc c'est un sous espace vectoriel.
Pour montrer que $M_0 V$ est stable par $M_0 N_0$ on doit montrer que pour tout élément $y = M_0 V$ on a $M_0 N_0 y \in M_0(V)$. Or $M_0 N_0 y = M_0 t$ avec $t = M_0 N_0 y \in V$.
Par suite il existe un vecteur propre (corps de base $\mathbb{C}$ et dimension finie) de $M_0 N_0$ dans ce sous espace .Ce qui correspond à l'affirmation:

$$\boxed{\exists (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V) / z \neq 0_V \quad et \quad M_0 N_0 z = \alpha z.}$$

En regardant de nouveau l'image de x_1 on a $(M_1 - \alpha M_0)\, x_1 = z_2 - \alpha z_1 \neq 0_V$ car (z_1, z_2) est un système libre .
On a donc $M_1 - \alpha M_0 \neq 0_E$
Et on a aussi $Ker(M_0) \subset Ker(M_1 - \alpha M_0)$ car $M_0 x = 0_V \Rightarrow (M_1 - \alpha M_0)\, x = M_0 N_0 M_0 x - M_0 x = 0_V$. Donc $rg(M_1 - \alpha M_0) = n - \dim\left(Ker\left(M_1 - \alpha M_0\right)\right) \leq n - \dim\left(Ker\left(M_0\right)\right) = rg(M_0)$.

De plus l'inclusion est strict car si $z = M_0 v$ on a $(M_1 - \alpha M_0)v = M_0 N_0 M_0 v - \alpha M_0 v = M_0 N_0 z - \alpha z = 0_V$.
Donc

$$\boxed{0 < rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0)}$$

L'élément M_1 est dans $\mathcal{L}$ et $M_1 - \alpha M_0$ aussi (sous espace vectoriel). Donc il y une absurdité puisque M_0 étant une matrice non nul de rang minimal il ne peut pas exister de matrice non nul ayant un rang strictement plus petit.
L'hypothèse $m \geq 2$ est donc fausse et on conclut que $\boxed{m = 1}$.

$$(P_3, P_4, P_5, P_6) \Rightarrow P_1$$

PARTIE 3

Hypothèse : $n > 2, \quad dim(\mathcal{L}) \geq n^2 - 1$, $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel stable par produit de matrices.

6. A

Soit $F = \{M \in E, M(W) \subset W\}$.

- F est non vide car $I \in F$
- F est stable par combinaison linéaire :
  Soient M_1 et M_2 dans F et deux scalaires λ_1 et λ_2 . On a :

  $$\forall w \in W, (M_1 w \in W, M_2 w \in W) \Rightarrow (\lambda M_1 + \lambda_2 M_2)\, w = \lambda_1 M_1 w + \lambda_2 M_2 w \in W$$

  donc $(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)\,(W) \subset W$.
- Pour calculer la dimension de F il vaut mieux se placer dans une base plus adaptée au calcul . Soit m l'endomorphisme tel que $M_{B_c}(m) = M$. On prend une base B obtenue en appliquant à W le théorème de la base incomplète: $B = (b_1 \cdots b_n)$ avec $(b_1, \cdots b_k)$ base de W . Comme W est stable par m on a pour tout $i \leq k$ $m(b_i) \in Vect(b_1 \cdots b_k)$ soit :

  $$M(W) \subset W \Leftrightarrow mat_B(m) = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

  où X, Y, Z sont des matrices arbitraires avec X carrée de taille $k = dim(W)$.
  Le système des $(E_{i,j})$ étant une base de E on peut en extraire une base de F en prenant les $E_{i,j}$ pour $(i \leq k, j \leq k)$ et ceux pour $(k < i \leq n, 1 \leq j \leq n)$

$$\text{On conclut} \quad : dim\{M \in E \mid M(W) \subset W\} = k^2 + (n-k)n = n^2 - k(n-k)$$

. Comme par définition de W : $\mathcal{L} \subset \{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ ce qui conduit à $n^2 - k(n-k) \geq n^2 - 1 \Rightarrow k(n-k) \leq 1$

- $k = 0$ est solution du problème
- $k = 1$ n'est pas solution car $n > 2$ (c'est là que sert l'hypothèse)
- si $k > 1$ alors $0 \leq n - k \leq \frac{1}{k} < 1.$ et donc $k = n$

$$\boxed{W = \{0_V\} \text{ ou } V}.$$

7. B

7.1. B

.$(I_n, E_{k,l})$ est libre donc $\dim(H) = 2$ et donc par la formule de Grassman :

$$\dim(H \cap L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(H + L) \geq (n^2 - 1) + 2 - n^2 = 1$$

Soit M_H une matrice non nul de $H \cap L$. comme M_H est dans H il existe deux complexes a et b tels que $M_H = aI_n + bE_{k,l}$. Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ et $E_{k,l} = \frac{M_H}{b} \in L$ absurde.
M_H est donc une matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale. Donc une matrice inversible.

7.2. B

$A = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1} + E_{n,1}$ est dans L et inversible .(Pivot de Gauss évident)
La partie B prouve que <u>dans tous les cas L contient une matrice inversible</u> .

8. C

La famille $(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1})$ comporte n^2+1 vecteurs dans un espace de dimension n^2 . Elle est donc liée et il existe une combinaison linéaire nulle.

$$\exists\,(\mu_i)_{i=1}^{n^2+1} \neq (0)\ ,\ \sum_i \mu_i A^i = 0_E$$

L'un des λ_i étant non nul , on peut considérer r le plus petit et s le plus grand . On a alors

$$A^r(\sum_{k=0}^{s-r} \mu_{k+r} A^k) = 0_E$$

Soit en notant $p = s - r$ et $\lambda_k = \mu_{k+r}$: $A^r(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k A^k) = 0$ avec $\lambda_0\lambda_p \neq 0$.
Si $p = 0$ il reste $A^r = 0$ ce qui est absurde car A est inversible.
Par inversibilité de A on peut simplifier par A^r :, $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k A^k = 0_E$. $\lambda_0\lambda_p \neq 0$.
Donc $I = \sum_{k=1}^{p} -\frac{\lambda_k}{\lambda_0} A^k$ est une combinaison linéaire de A^k *avec* $k \geq 1$ donc est dans L car $\forall k\ A^k \in L$ (stabilité de L par produit)..

9. D

Remarque:v_0 *existe (prendre une colonne non nul de* M_0*) . On put alors dire que chaque colonne* C_j *de* M_0 *est proportionnelle à* v_0 : $\exists t_j, C_j = t_j v_0$ *. On prend alors* $w_0 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$

C_u est un sous espace vectoriel de V non égal à V .(sinon $B_u = \{0_V\}$ ce qui est absurde car $u = I_n u \in B_u$)
pour montrer $C_u = \{0_V\}$ il suffit donc d'après P_6 de montrer que C_u est stable par L :
soit $x \in C_u$ et $M \in L$ on a alors pour tout élément ${}^t\overline{L}u \in C_u$:

$$^t\overline{(Mx)}\,^t\overline{L}u = ^t\overline{x}\,^t\overline{LM}u$$

Or L est stable par produit matriciel donc $LM \in L$ et par définition de C_u :${}^t\overline{x}\,{}^t\overline{LM}u = 0$. Donc $Mx \in C_u$.

$$\boxed{C_u = B_u^{\perp} = \{0_V\} \quad et\ B_u = V}$$

A_u est un sous espace vectoriel de V stable par L (car L vérifie P_5) .Or A_u contient u et n'est donc pas réduit à zéro . Donc d'après P_6 : $\boxed{Au = V}$.
Si x est dans V alors x est dans A_u donc il existe bien L . De même pour l'existence de M .
Comme toute matrice de rang 1 peut s'écrire $R_1 = x^t\overline{y}$

$$R_1 = Jv_0^t\bar{w}_0 M = JM_0 M \in L$$

Or toutes les matrices de la base canonique sont de rang 1 . L contient donc tous les éléments de la base canonique et

$$\boxed{L = E}$$