

## NOTATIONS

Faites porter votre effort sur le III qui correspond au dernier chapitre

Soit  $V$  un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel  $V$  est désigné par  $L(V)$ . Soit  $f$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $V$  ; l'endomorphisme noté  $f^k$ , où  $k$  est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité  $Id_V$  si l'entier  $k$  est nul, l'endomorphisme obtenu en composant  $f$   $k$ -fois avec lui-même si l'entier  $k$  est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V ; f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel  $n$ , soit  $E_n$  l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$  :

$$E = \mathbb{R}[X] ; E_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Soit  $D$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$  qui, au polynôme  $Q$ , fait correspondre le polynôme dérivé  $Q'$ . De même, soit  $D_n$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  qui, au polynôme  $Q$ , fait correspondre le polynôme dérivé  $Q'$ .

L'objet du problème est de rechercher des réels  $\lambda$  pour lesquels l'endomorphisme  $\lambda Id_E + D$  est égal au composé d'un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E$  avec lui-même ; ainsi que des réels  $\lambda$  pour lesquels l'endomorphisme  $\lambda Id_{E_n} + D_n$  est égal au composé d'un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E_n$  avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et deuxième parties ainsi que des préliminaires.

## PRÉLIMINAIRES

**Noyaux itérés :**

Soient  $V$  un espace vectoriel réel et  $f$  un endomorphisme de  $V$ .

a. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes  $f^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  est une suite de sous-espaces vectoriels de  $V$  emboîtée croissante :

$$\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \ker f^2 \subset \dots \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset \dots$$

b. Démontrer que, s'il existe un entier  $p$  tel que les noyaux des endomorphismes  $f^p$  et  $f^{p+1}$  soient égaux ( $\ker f^p = \ker f^{p+1}$ ), pour tout entier  $q$  supérieur ou égal à  $p$ , les noyaux des endomorphismes  $f^q$  et  $f^{q+1}$  sont égaux ( $\ker f^q = \ker f^{q+1}$ ) ; en déduire la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à } p, \ker f^k = \ker f^p.$$

En déduire que, si l'espace vectoriel  $V$  est de dimension finie  $n$ , la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes  $f^k$  est constante à partir d'un rang  $p$  inférieur ou égal à la dimension  $n$  ( $p \leq n$ ). En particulier les noyaux  $\ker f^n$ ,  $\ker f^{n+1}$  sont égaux.

c. Démontrer que, si l'endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n$ , est tel qu'il existe un entier  $q$  supérieur ou égal à 1 ( $q \geq 1$ ), pour lequel l'endomorphisme  $u^q$  est nul ( $u^q = 0$ ), l'endomorphisme  $u^n$  est nul ( $u^n = 0$ ).

L'endomorphisme  $u$  est dit nilpotent.

## PREMIERE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes  $g$  recherchés et de donner un exemple.

**I-1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par  $g$  :**  
Soit  $\lambda$  un réel donné.

a. Étant donné un entier naturel  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), soit  $p$  un entier naturel inférieur ou égal à l'entier  $n$  ( $0 \leq p \leq n$ ). Démontrer que, s'il existe un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ , tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n,$$

l'endomorphisme  $g$  commute avec  $D_n$  :

$$g \circ D_n = D_n \circ g.$$

En remarquant que le sous-espace vectoriel  $E_p = \mathbb{R}_p[X]$  est égal à  $\ker(D_n)^{n-p+1}$ , démontrer que  $E_p$  est stable par l'endomorphisme  $g$  de  $E_n$  ; soit  $g_p$  la restriction de l'endomorphisme  $g$  à  $E_p$ . Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda Id_{E_p} + D_p.$$

b. Démontrer que, s'il existe un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$ , tel que

$$g^2 = \lambda Id_E + D,$$

l'endomorphisme  $g$  commute avec  $D$  :

$$g \circ D = D \circ g.$$

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , le sous-espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  est stable par l'endomorphisme  $g$  et que, si  $g_n$  est la restriction de l'endomorphisme  $g$  à  $E_n$ , il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

c. Soit  $g$  un endomorphisme de l'espace des polynômes réels  $E = \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

i/ Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $E$  de dimension  $n+1$  stable par l'endomorphisme  $D$ . Démontrer que l'endomorphisme  $D_F$ , restriction de  $D$  à  $F$ , est nilpotent.

En déduire que le sous-espace vectoriel  $F$  est égal à  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels  $G$  de  $E$  (de dimension finie ou non) stables par  $D$ .

ii/ Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$  soit stable par l'endomorphisme  $g$ , il faut et il suffit qu'il soit stable par  $D$ .

**I-2. Une application immédiate : le cas  $\lambda < 0$  :**

a. À quelle condition nécessaire sur le réel  $\lambda$  existe-t-il un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$  tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0 ?$$

b. Soit  $\lambda$  un réel strictement négatif ( $\lambda < 0$ ), déduire des résultats précédents les deux propriétés :

. Il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

. Il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de  $E_n$  tel que :

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

**I-3. Une représentation matricielle simple de  $\mathcal{D}_n$ .**  
Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1,  $\lambda$  un réel.

Matrice  $A_\lambda$  : soit  $A_\lambda$  la matrice carrée d'ordre  $n+1$  définie par les relations suivantes : ses coefficients  $a_{ij}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , sont définis par les relations :

$$a_{ii} = \lambda, \quad a_{i, i+1} = 1, \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n+1$  tel que l'endomorphisme  $f^{n+1}$  soit nul sans que l'endomorphisme  $f^n$  le soit :

$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur  $y$  de l'espace vectoriel  $V$  tel que la famille  $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, y)$  soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme  $f$  dans la base  $B$  ?

b. En déduire qu'il existe une base  $B_n$  de l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme  $D_n$  est la matrice  $A_0$ . Que vaut la matrice associée à l'application  $\lambda Id_{E_n} + D_n$  dans cette base  $B_n$  ?

**I-4. Un exemple :**

Dans cette question l'entier  $n$  est égal à 2.

a. Démontrer que les seuls endomorphismes  $h$  de  $E_2$  qui commutent avec l'endomorphisme  $D_2$  sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en  $D_2$  :

$$h = a Id_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2.$$

$a, b, c$  sont trois réels.

b. En déduire qu'il existe des endomorphismes  $g$  de  $E_2$  qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_{E_2} + D_2.$$

Déterminer les matrices carrées  $G$  d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$

## DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel  $\lambda$  est nul. Dans cette partie l'entier  $n$  est supposé donné supérieur ou égal à 1.

**II-1. Existence d'un endomorphisme  $g$  tel que  $g^2 = D_n$  :**

a. Montrer que, s'il existe un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $g^2 = D_n$ , alors l'endomorphisme  $g$  est nilpotent et le noyau de l'endomorphisme  $g^2$  a une dimension au moins égale à 2 ( $\dim \ker g^2 \geq 2$ ).

b. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $g^2 = D_n$ .

c. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$  tel que  $g^2 = D$ .

Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 1 ( $m \geq 1$ ) et  $k$  un entier supérieur ou égal à 2 ( $k \geq 2$ ). Soit  $g$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$  tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g^k = D^m.$$

a. Démontrer que les deux endomorphismes  $D$  et  $g$  sont surjectifs.

b. Démontrer que les sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $\ker g^q$  ont des dimensions finies lorsque l'entier  $q$  est inférieur ou égal à l'entier  $k$  ( $0 \leq q \leq k$ ).

c. Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à  $k$  ( $2 \leq p \leq k$ ). Soit  $\Phi$  l'application définie dans l'espace vectoriel  $\ker g^p$  par la relation :

$$\Phi : P \mapsto g(P).$$

Démontrer que cette application  $\Phi$  est une application linéaire de  $\ker g^p$  dans l'espace vectoriel  $\ker g^{p-1}$ . Quel est le noyau de l'application  $\Phi$  ? Démontrer que l'application  $\Phi$  est surjective ( $\text{Im } \Phi = \text{Ker } g^{p-1}$ ).

En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels  $\ker g^p$  et  $\ker g^{p-1}$ . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel  $\ker g^p$  en fonction de la dimension de l'espace vectoriel  $\ker g$  ?

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers  $k$  et  $m$  pour qu'il existe au moins un endomorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $E$  tel que  $g^k = D^m$ . Retrouver le résultat de la question II-1.c.

### TROISIÈME PARTIE

L'entier strictement positif  $n$  est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  est muni de la base  $B_n$  définie à la question I-3.b. La matrice associée à l'application  $I_{E_n}$  est la matrice  $I_{n+1}$  ; la matrice associée à l'endomorphisme  $D_n$ , est désignée par le même symbole  $D_n$ .

Étant donné un réel  $\lambda$  supposé strictement positif ( $\lambda > 0$ ), soit  $L_n$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans l'espace des matrices carrées réelles d'ordre  $n+1$ ,  $M_{n+1}(\mathbb{R})$  qui, au réel  $t$  associe la matrice  $L_n$  définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k.$$

La matrice  $(D_n)^k$  est le produit  $k$ -fois avec elle-même de la matrice  $D_n$ .

III-1. Dérivée de l'application  $t \mapsto (L_n(t))^k$  :

a. Démontrer que, pour tout  $t$  réel, la matrice  $I_{n+1} + t D_n$  est inversible et que son inverse, noté  $(I_{n+1} + t D_n)^{-1}$ , s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_{n+1} + t D_n)^{-1} = \sum_{k=0}^n a_k(t) (D_n)^k.$$

Déterminer les fonctions  $a_k : t \mapsto a_k(t)$  (bien sûr :  $(D_n)^0 = I_{n+1}$ ).

b. Démontrer que l'application de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des matrices, réelles, carrées, d'ordre  $n+1$  :  $t \mapsto (I_{n+1} + t D_n)^{-1}$  est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices  $(I_{n+1} + t D_n)^{-1}$  et  $D_n$ .

c. Démontrer que, pour tout réel  $t$ , la matrice  $L_n(t)$ , élevée à la puissance  $n+1$  est nulle :

$$(L_n(t))^{n+1} = 0.$$

d. Calculer la fonction dérivée  $t \mapsto \frac{d}{dt} L_n(t)$  de la fonction  $t \mapsto L_n(t)$  au moyen des matrices  $D_n$  et  $(I_{n+1} + t D_n)^{-1}$ .

Étant donné un entier naturel  $k$  donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée  $t \mapsto \frac{d}{dt} (L_n(t))^k$  de la fonction  $t \mapsto (L_n(t))^k$  à l'aide de l'entier  $k$  et des matrices  $L_n(t)$ ,  $D_n$  et  $(I_{n+1} + t D_n)^{-1}$ .

**III-2. Matrice  $\varphi_u(t)$  :**

Étant donné un réel  $u$ , soit  $\varphi_u(t)$  la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} (L_n(t))^k.$$

a. Démontrer qu'étant donnés deux réels  $u$  et  $v$  le produit des matrices  $\varphi_u(t)$  et  $\varphi_v(t)$  est égal à la matrice  $\varphi_{u+v}(t)$  :

$$\varphi_u(t) \cdot \varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t).$$

b. Démontrer que la fonction  $t \mapsto \varphi_u(t)$  est dérivable et que sa dérivée  $\varphi_u'$  est définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\varphi_u'(t) = u (I_{n+1} + t D_n)^{-1} \circ D_n \varphi_u(t).$$

c. Dans cette question le réel  $u$  est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction  $\varphi_1$  est nulle : pour tout réel  $t$ ,  $\varphi_1''(t) = 0$ . En déduire la relation :

$$\varphi_1(t) = I_{n+1} + t D_n.$$

**III-3. Existence de l'endomorphisme  $g$  :**

a. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif ( $\lambda > 0$ ) ; en utilisant les résultats de la question précédente et en remarquant la relation suivante

$$\lambda I_{n+1} + D_n = \lambda \left( I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n \right),$$

démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre  $n+1$  telle que

$$M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer cette matrice  $M$  avec une matrice  $\varphi_u(t)$ . En déduire l'existence d'un endomorphisme  $g$  de  $E_n$  tel que :

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

b. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

## QUATRIÈME PARTIE [ Réservée 5/2 ]

**IV-1. Un développement en série entière :**

a. Soit  $h$  la fonction définie sur la demi-droite  $[-1, \infty[$  par la relation :

$$h(x) = \sqrt{1+x}.$$

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction  $h$ .

b. En déduire qu'il existe un intervalle ouvert  $] -R, R[$  dans lequel la fonction  $h$  est la somme d'une série entière de terme général  $b_p x^p$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  et les coefficients  $b_p$ .

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } ] -R, R[, \quad h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p.$$

c. Déterminer les valeurs des réels  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  définis par la relation suivante :

$$c_n = \sum_{p=0}^n b_p b_{n-p}.$$

**IV-2 Existence d'un endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que  $g^2 = \lambda Id_E + D$  où  $\lambda$  est strictement positif :**

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif donné ( $\lambda > 0$ ).

a. Soit  $T$  l'application définie dans  $E = \mathbb{R}[X]$  par la relation :

$$\text{pour tout } P \text{ de } E, T(P) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p P.$$

Démontrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

b. Calculer pour tout polynôme  $P$  de  $E$  son image par l'application composée  $T \circ T = T^2$ .

c. En déduire l'existence d'un endomorphisme  $g$  de  $E$  qui vérifie la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

d. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'existence d'un endomorphisme  $g_n$  de l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  tel que la relation ci-dessous ait lieu :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

Exprimer l'endomorphisme  $g_n$  comme un polynôme de l'endomorphisme  $D_n$ . Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

**FIN DU PROBLÈME**