PC2 : Devoir n° 4 : samedi 8 Decembre.

Problème

On se propose dans ce problème d'étudier quelques propriétés de l'application $(n,\alpha) \to x_n(\alpha)$ ou $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ et $x_n(\alpha)$ vérifie :

$$\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \alpha$$

On posera, pour tout entier naturel n et tout réel $t \geq 0$:

$$f_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n}$$

La partie III est dans une large mesure indépendante des deux premières parties du problème.

PRELIMINAIRE

Soit $\varphi_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^n} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

P1 : Montrer que φ_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\varphi'_n(x)$

P2 Etudier si f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} \varphi_n(x)$

P3 Donner le tableau de variation de φ_n sur $\mathbb{R}^+$

P4 Montrer que φ_n est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

Partie I : Etude de la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

I-1 On supposera dans cette question $n \geq 3$.

(a) Montrer que la dérivée $D(f_n)$ de la fonction f_n s'annulle 2 fois sur $[0,+\infty[$ en α_n et β_n tels que $0 < \alpha_n < 1$ et $n-1 < \beta_n$.

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que $\beta_n < n$, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} f_n(\beta_n)$.

(c) Montrer que $(\alpha_n)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n)$.

I-2 Dans cette question $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction g que l'on précisera.

(b) Etudier la position relative des graphes des fonctions f_n, f_{n+1} et g.

(c) Représenter sur une même figure les graphes de f_n et de g, pour n grand.

(d) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

I-3 Soit $A \in \mathbb{R}_+$ un réel fixé. En citant précisément le théorème utilisé et en en vérifiant les hypothèses, déterminer la limite pour $n \to +\infty$ de la suite $\int_0^A \frac{e^t}{1+t^n} dt$.

Danger : le α du III-3 et du III 2 n'est pas celui du II

Par contre celui du III 6 et du III 7 est celui du II

III-3 $\alpha \in [0,1[$ est donné. Soit f une application de $[\alpha,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^n, où n sera successivement égal à 0 et 1.

(a) On suppose $n=0$. Calculer la limite pour $x \to +\infty$ de $x \to \int_\alpha^1 t^x f(t)dt$.

(b) On suppose $n=1$. Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, la limite pour $x \to +\infty$ de $x \to x\int_\alpha^1 t^{kx} f(t)dt$.

(c) On suppose $n=1$ Etablir en s'inspirant des méthodes de la question **III-2** que :

$$\lim_{x\to+\infty} x\int_\alpha^1 \ln(1+t^x)f(t)dt = \frac{\pi^2}{12}f(1)$$

III-4 Dans cette question, f est une application de classe C^2 sur $[a,b]$, $0 \leq a < b$. On pose :

$$I_n = \int_a^b \frac{t^n f(t)}{1+t^n}dt$$

(a) On suppose $b<1$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^p I_n = 0$.

(b) On suppose $b=1$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{f(1)\ln(2)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{12} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

(c) On suppose $a \geq 1$. Déduire des cas précédents l'existence de deux constantes λ et μ telles que :

$$I_n = \int_a^b f(t)dt + \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variable dans $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n}dt$.

Exprimer ces constantes dans le cas $a=1$ en fonction de $f(1)$ et $f'(1)$.

(d) En déduire que si $a<1<b$,

$$I_n = \int_1^b f(t)dt - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{6} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

III-5 Déterminer, suivant les valeurs du réel γ trois constantes λ_1, λ_2, λ_3 telles que :

$$\int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

III-6 *Calcul de* $\lim_{n\to+\infty} x_n(\alpha)$ *lorsque* $\alpha = e-1$. On suppose ici $\alpha = e-1$.

(a) Soit $A \geq 1$. Donner un équivalent de $\int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt$ (on distinguera $A>1$ et $A=1$).

(b) En déduire la limite de la suite $x_n(\alpha)$ pour $n \to +\infty$.

III-7 On suppose $0 \leq \alpha < e-1$. Démontrer la relation :

$$x_n(\alpha) - \ln(\alpha+1) = o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

Rappel pour la partie III
$\forall x \in [0,1]$ $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Partie II : La suite $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

II-1 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé.

(a) Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 0$ donné, il existe un et un seul $x_n(\alpha) \geq 0$ tel que :

$$\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \alpha$$ et exprimer x_n en fonction de φ_n^{-1}

(b) Préciser le sens de variation de la fonction $x_n : \alpha \to x_n(\alpha)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

II-2 Montrer que $x_n : \alpha \to x_n(\alpha)$ est [redacted] de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

Montrer de plus que la fonction x_n est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = \frac{1}{f_n(y)}$$

II-3 Démontrer que pour $n \geq 3$, le graphe de x_n possède deux points d'inflexions a_n et b_n dont on exprimera les abscisses respectivement en fonction de α_n et β_n sous forme d'une intégrale.

II-4 Dans cette question le réel α est fixé tel que $\alpha > e-1$.

(a) Soit $A > 1$ un réel quelconque : à l'aide de la question **I-3**, déterminer la limite de $I_n = \int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) En déduire en revenant à la définition d'une limite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = +\infty$.

II-5 Dans cette question α est fixé tel que $\alpha < e-1$.

(a) Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $x_n(\alpha) < 1$ (on raisonnera par l'absurde).

(b) Etudier le sens de variation de la suite $x_n(\alpha)$ à partir du rang N. En déduire que la suite $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

(c) Démontrer l'inégalité pour $n \geq N$:

$$\left|\int_l^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt\right| \leq e\left|x_n(\alpha) - l\right|$$ $\left|\int_l^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt\right|$

En déduire la valeur de l à l'aide de la question **I-3**.

Partie III : Etude du cas particulier $\alpha = e-1$

III-1 En utilisant le résultat connu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

III-2 Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose pour $x > 0$:

$$u(x) = x\int_\alpha^1 \ln(1+t^x)dt$$

(a) Démontrer que $u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(1-\alpha^{kx+1})x}{k(kx+1)}$.

(b) Calculer la limite de $u(x)$ pour $x \to +\infty$.