

Epreuve de Mathématiques II-B durée 4h

Notations.

On munit \mathbb{R}^2 de la base orthonormée usuelle (\vec{i}, \vec{j}) . Un point M de \mathbb{R}^2 est représenté par ses coordonnées (x, y) dans le repère usuel (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $f : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable en un point $(x_0, y_0) \in O$, où O est un ouvert de \mathbb{R}^2 , les dérivées partielles de f au point de coordonnées (x_0, y_0) sont notées classiquement par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Lorsqu'une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point x on notera la dérivée $\frac{d}{dx}(h(x))$ ou $h'(x)$.

Le but de ce problème est d'étudier une modélisation mathématique du problème de l'écoulement en couche mince d'un fluide visqueux. Le sujet comporte 5 parties qui peuvent être traitées de façon assez largement indépendante. En particulier : La partie B peut être traitée en admettant le résultat de la partie A. La partie C est traitée en admettant le résultat énoncé en B-III. Les questions E-I et E-II sont complètement indépendantes du reste si l'on admet le résultat énoncé en C-II.

A. Partie préliminaire.

Soit f , une application définie sur un ouvert O de \mathbb{R}^2 et à valeur dans \mathbb{R}

$$f : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit g , une application définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de \mathbb{R} .

$$g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

On suppose que f est de classe C^1 sur O et que g est continûment dérivable sur I . On suppose enfin qu'il existe un intervalle $[c, d]$ de \mathbb{R} non vide, tel que $I \times [c, d] \subset O$ et que $g(I) \subset [c, d]$. On définit la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_c^{g(x)} f(x, y) dy.$$

Montrer que F est dérivable sur I et que

$$F'(x) = g'(x)f(x, g(x)) + \int_c^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

si $x \in I$.

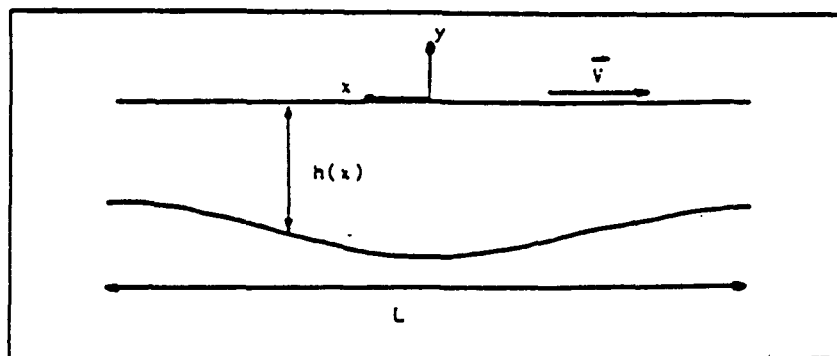


Figure 1.

Partie B.

Soit h une application définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles strictement positives, indéfiniment dérivable :

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$$

Soit O , l'ouvert de \mathbb{R}^2 défini par

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in]-h(x), 0[\}$$

On admet que l'écoulement d'un fluide visqueux, confiné entre une paroi inférieure d'équation $y = -h(x)$ et une paroi supérieure d'équation $y = 0$ (figure I), peut, sous certaines hypothèses physiques qui ne font pas l'objet de ce problème, être modélisé mathématiquement de la façon suivante: on recherche

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2$$

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2$$

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1$$

vérifiant les équations :

$$\forall (x, y) \in O \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = p'(x) \quad (1)$$

$$\forall (x, y) \in O \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, -h(x)) = v(x, -h(x)) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = V. \quad (3)$$

Dans ces équations $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont les composantes suivant \vec{i} et \vec{j} de la vitesse du fluide et $p(x)$ est la pression au sein de ce fluide. Enfin le nombre V est un réel donné (vitesse de la paroi plane qui met le fluide en mouvement).

I. Exprimer u en fonction de la constante V , des variables x, y , des applications p et h (et éventuellement de leurs dérivées).

II. On définit l'application $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$Q(x) = \int_{-h(x)}^0 u(x, y) dy$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q'(x) = 0.$$

III. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dx}(h^3(x)p'(x)) = 6Vh'(x)$$

Partie C.

On suppose que les fonctions h et p définies en partie B sont périodiques de période $L > 0$.

I.a Montrer que h atteint ses bornes sur \mathbb{R} . On note

$$h_0 = \inf\{h(x), x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$h_1 = \sup\{h(x), x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $h_0 > 0$.

I.b Montrer que p' s'annule sur $[0, L[$.

II.a Montrer, en utilisant les résultats de la partie B l'existence de $h^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$p'(x) = 0 \text{ si et seulement si } h(x) = h^*.$$

II.b Montrer que

$$h^* = \frac{\int_0^L \frac{1}{h^2(x)} dx}{\int_0^L \frac{1}{h^3(x)} dx}$$

II.c En remarquant pour tout x que $h_0 h(x)^2 \leq h(x)^3 \leq h_1 h(x)^2$, montrer que $h_0 \leq h^* \leq h_1$. Montrer qu'un cas d'égalité n'est possible que si h est une fonction constante.

III.a Montrer que u s'écrit dans O de la façon suivante :

$$\forall (x, y) \in O, u(x, y) = V \left\{ 3 \frac{y}{h(x)} \left(1 + \frac{y}{h(x)} \right) \left(1 - \frac{h^*}{h(x)} \right) + \left(1 + \frac{y}{h(x)} \right) \right\}$$

III.b En déduire pour tout $(x, y) \in O$ la valeur de $v(x, y)$.

III.c L'hypothèse de dérivabilité est-elle vérifiée pour u et v ?

Épreuve 2B 4/4

Partie D.

Les hypothèses sont celles de la partie C. On suppose, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in]-h(x_0), 0[$ donnés, l'existence d'une unique trajectoire définie par le couple de fonctions $t \rightarrow X(t)$ et $t \rightarrow Y(t)$, de classe C^1 définies sur \mathbb{R} telles que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \\ \frac{dX(t)}{dt} &= u(X(t), Y(t)), \\ \frac{dY(t)}{dt} &= v(X(t), Y(t)), \\ X(0) &= x_0, \quad Y(0) = y_0. \end{aligned}$$

On admet que l'existence de trajectoires fermées implique qu'il existe $x \in [0, L]$ tel que l'application $y \rightarrow u(x, y)$ change de signe sur $[-h(x), 0[$.

I Expliciter cette condition par un dessin.

II Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe des trajectoires fermées est que

$$\frac{h^*}{h_1} < \frac{2}{3}.$$

Partie E. Cas particulier.

On suppose ici que h est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{a + b \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)},$$

où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}^{+,*}$

I. Comment faut-il choisir a et b pour que h soit bien définie ? On choisira alors a et b tels que $h(0) = h_0$ et $h\left(\frac{L}{2}\right) = h_1$.

II. Calculer h^* .

III.a Exprimer $\frac{h^*}{h_1}$ à l'aide de $\alpha = \frac{h_1}{h_0}$. Calculer la valeur de $\frac{h^*}{h_1}$ pour $\alpha = 0$ et sa limite pour $\alpha \rightarrow \infty$

III.b Montrer que l'on peut choisir α pour qu'il puisse exister des trajectoires fermées.