MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1996
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD,

Banque de notes pour le concours EIVP

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES PRATIQUES

Temps accordé : 2 heures

(2 pages)

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(0\,;\vec{i},\vec{j})$
On se propose d'étudier quelques propriétés de la courbe Γ (appelée spirale de Cornu), ensemble des points M(t)

dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont $X(t)=\int_0^t \cos(u^2)\,du$, $Y(t)=\int_0^t \sin(u^2)\,du$ où t décrit $\mathbf{R}$.

I CONSTRUCTION DE Γ

I- 1 Montrer que les fonctions X et Y sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbf{R}$.
Etudier la parité de X et de Y. Quelle symétrie présente Γ ?

I- 2 Montrer que les fonctions X et Y ont des limites finies lorsque t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

On admettra que ces limites sont toutes deux égales à $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$ et on appellera K le point de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}, \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)$.

I- 3 Etudier les variations de X et de Y. (Tableau de variations).

I- 4 On pose dans la suite, pour tout t appartenant à $\mathbf{R}$, $F(t)=\left(\int_t^{+\infty}\cos(u^2)\,du\right)^2+\left(\int_t^{+\infty}\sin(u^2)\,du\right)^2$.
Donner une interprétation géométrique simple de $F(t)$.

Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et que, pour t appartenant à $\mathbf{R}_+$, on a $F'(t)=-\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos v}{\sqrt{v+t^2}}\,dv$.

I- 5 On fixe un nombre a strictement positif et on pose $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos v}{\sqrt{a+v}}dv$.

a) Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, montrer que $\int_0^{\pi} f(u)\cos u\,du$ est strictement positive.

b) Etudier la série de terme général $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\cos v}{\sqrt{a+v}}dv$ et en déduire que I est un réel strictement positif.

c) Que peut-on en conclure concernant la fonction F ?

I- 6 Employer une méthode analogue à celle qu'on a utilisée au 5°), pour déterminer le signe de $Y(t)$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. On admettra de même que $X(t)$ est strictement positif pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+^*$.

I-7 Γ admet-elle un point double ?

I- 8 Montrer que Γ a un unique point d'inflexion ; le déterminer.

I- 9 Représenter la courbe Γ.

II ETUDE METRIQUE DE Γ

II-10 Déterminer une abscisse curviligne s sur Γ (on pourra choisir l'origine en O).

II-11 Déterminer le rayon de courbure R de Γ en un point $M(t)$.

II-12 On considère un arc birégulier : γ de classe $\mathcal{C}^2$,et soit s une abscisse curviligne sur γ. On suppose qu'en tout point M de γ d'abscisse curviligne s, le rayon de courbure R vérifie $R.s=\frac{1}{2}$.

a) Si φ désigne l'angle $(\vec{i}, \vec{\tau})$, où $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire de la tangente orientée à γ au point M de γ d'abscisse curviligne s, montrer que φ s'exprime en fonction de s par une relation du type : $\varphi = k + s^2$.

b) En déduire qu'il existe une transformation géométrique simple T telle que $T(\gamma) \subset \Gamma$.