PROBLEME 1
E.M. Lyon 2001
PREMIERE PARTIE

1. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, f^2(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   et pour vérifier qu'il n'y a pas d'étourderie de calcul on cherche tout de suite $f^3(e_1)$ et $f^4(e_1)$ pour vérifier $f^4(e_1) = e_1$.

   On doit donc étudier le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Le calcul du déterminant ou le Pivot de Gauss ($L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$) donne le résultat.

   $$\boxed{e_1, f(e_1), f^2(e_1) \text{ est une base de } E}$$

2. $f^3(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f^4(e_1) = e_1$.de plus $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\right)$ est bien générateur , car les trois premiers vecteurs forment une base. $\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre } 4}$

3. Calcul: $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^4 = \left(A^2\right)^2 = Id$

4. On cherche une base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ et telle que $\text{Mat}_{B'}(f) = D$. Soit à résoudre dans la base B : $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = iv_2$, $f(v_3) = -iv_3$

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+i & -1-i \end{pmatrix}$$

   On peut vérifier $A = PDP^{-1}$

SECONDE PARTIE

1. Un cycle est un système générateur. Son cardinal est donc supérieur à la dimension de l'espace vectoriel : $\boxed{p \geq n}$

2. Pour prouver que deux endomorphismes sont égaux il suffit de le prouver pour les vecteurs d'une base. Comme on peut extraire une base de la famille génératrice $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{p-1}$ il suffit pour montrer $f^p = Id$ de montrer $\forall i \in [[0, p-1]]$ $f^p\left(f^i(x_0)\right) = f^i(x_0)$. Or $f^p\left(f^i(x_0)\right) = f^i\left(f^p(x_0)\right) = f^i(x_0)$ d'après l'hypothèse $f^p(x_0) = x_0$
   f^{p-1} est donc de façon évidente la fonction réciproque de f^p : $f^{p-1} \circ f = f \circ f^{p-1} = Id$

   $$\boxed{f^p = Id \text{ et } f \text{ est bijective}}$$

3.

   1. Par définition de m $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$ est libre et $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m}$ est lié. Il existe donc une combinaison linéaire $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ avec la famille $(\lambda_i) \neq (0)$.
      Si $\lambda_m = 0$ on a $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ et donc $\forall i, \lambda_i = 0$ (famille libre) : absurde
      donc $\lambda_m \neq 0$ et $f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right) f^i(x_0)$

   2. pour $k = m$ on vient de montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$.
      supposons alors $f^k(x_0) \in \text{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$, il existe donc des μ_i tels que $f^k(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(x_0)$. Si on compose par f on a

      $$f^{k+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_{i-1} f^i(x_0) + \mu_{m-1} f^m(x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_{i-1} f^i(x_0) + \mu_{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right) f^i(x_0)$$

      Donc $f^{k+1} \in \text{Vect}\left(\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}\right)$

      $$\forall k \geq m \ , \ f^k(x_0) \in \text{Vect}\left(\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}\right)$$

   3. Si $m > n$ la famille ne peut pas être libre :(cardinal trop grand)
      si $m < n$ on a d'après la question précédente et l'hypothèse que $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{p-1}$ engendre E le fait que $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$ engendre E . ce qui est absurde (cardinal trop petit)
      La famille étant libre et génératrice est une base de E notée B'

      $$\boxed{m = n \text{ et } \left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \text{ est une base de E}}$$

4.

1. g est un polynôme de l'endomorphisme f ainsi que f^k donc f^k et g commutent et donc :

$$\begin{aligned} g\left(f^k(x_0)\right) &= f^k\left(g\left(x_0\right)\right) = f^k\left(f^n(x_0)\right) \text{ par définition de } g \text{ et des } a_i \\ &= f^{k+n}(x_0) \end{aligned}$$

On a aussi

$$g\left(f^k(x_0)\right) = f^n\left(f^k(x_0)\right)$$

les deux applications g et f^n sont égales pour tout vecteur de la base $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{n-1}$. Elles sont donc égales $\boxed{g = f^n}$

2.

$$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} , \left\{ \begin{array}{c} m_{i,n} = a_{i-1} \\ m_{i,i-1} = 1 \\ m_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

5. Dans ce cas $f^n(x_0) = x_0$ donc $a_0 = 1$, $i > 0 \Rightarrow a_i = 0$

$$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \left\{ \begin{array}{c} m_{1,n} = 1 \\ m_{i,i-1} = 1 \\ m_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Toute la suite va bien sur se faire en calculant dans cette base:

1. Si $f(v) = \lambda v$ on a par récurrence immédiate $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(v) = \lambda^k v$. En particulier $v = f^n(v) = \lambda^n v$. Or v est non nul donc $\underline{\lambda^n = 1}$.
2. Soit x_k tel que $mat_{B'}(x_k) = (\alpha_i)_{i=1}^n$. On doit étudier le système

$$\alpha_n = \lambda_k \alpha_1$$
$$\forall i \geq 2, \alpha_{i-1} = \lambda_k \alpha_i$$

On a donc $\alpha_n = \lambda_k \alpha_1 = \lambda_k^2 \alpha_2 = \cdots = \lambda_k^i \alpha_i = \cdots$.En particulier $\alpha_n = \lambda_k^n \alpha_n = \alpha_n$.
α_n semble donc être indéterminé et on sait calculer alors les α_i :

$$mat_{B'}(x_k) = \alpha_n \begin{pmatrix} \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie sans problème que ce vecteur est solution. On prend par exemple $a_n = 1$

$$\boxed{\text{Ker}(f - \lambda_k Id) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3. Si $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k = \overrightarrow{0}$. On a en composant par f^i : $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_k^i x_k = \overrightarrow{0}$. Soit alors $P = \sum_{i=0}^d p_i X^i$ On a $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P(\lambda_k) x_k = \sum_{i=0}^d \left(p_i \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_k^i x_k\right) = \sum \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
On prend alors pour P un polynôme d'interpolation de Lagrange $P_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{i=n-1} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$. pour avoir $P_j(\lambda_j) = 1$, $\forall i \neq j \; P_j(\lambda_i) = 0$. On a alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P(\lambda_k) x_k = \alpha_k x_k$ et donc $\alpha_k = 0$ car $x_k \neq \overrightarrow{0}$
les $(x_k)_{k=0}^{n-1}$ forment donc une famille libre , et donc une base de E car le cardinal est le bon.
4. la matrice de f dans cette base est diagonale avec les (λ_k) sur la diagonale.

PROBLEME 2
E.N.S option B.L. 2000
PRELIMINAIRE

1. H est un hyperplan et a est un vecteur non élément de H . On sait donc que H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires. Tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur colinéaire à a . Le résultat est vrai en particulier pour $u(a)$:

$$\boxed{\exists!(\gamma, h_a), \gamma \in \mathbb{R}, h_a \in H, u(a) = \gamma a + h_a}$$

2. On prend les décompositions : $u(a) = \gamma a + h_a$ et $u(b) = \gamma' b + h_b$ et on doit montrer $\gamma = \gamma'$.

   Toujours à l'aide des sous espaces supplémentaires b se décompose sous la forme $b = ka + h$, $k \in \mathbb{R}, h \in H$.

   Avec de plus $k \neq 0$ car $b \notin H$. On a donc

$$\begin{aligned} u(b) &= ku(a) + u(h) = ku(a) + h \text{ car } H \text{ est invariant par } u \\ &= k(\gamma a + h_a) + h = \gamma(b - h) + kh_a + h \\ &= \gamma b + (kh_a + h - \gamma h) \end{aligned}$$

   On a donc une décomposition du type $u(b) = \gamma b + h'$ avec $\gamma \in \mathbb{R}, h' \in H$. par unicité de la décomposition on a $\gamma = \gamma'$.

$$\boxed{\gamma \text{ est indépendant de } a}$$

PREMIERE PARTIE

1.

   1. reprenons le calcul du préliminaire $u(b) = gb + (kh_a + h - \gamma h)$.
      On cherche b tel que $u(b) = \gamma(b)$. Ce qui équivaut à $kh_a + h - \gamma h = 0$ (toujours l'unicité de la décomposition) donc à $h = \frac{kh_a}{\gamma - 1}$ (possible car $\gamma \neq 1$).Les vecteurs a_0 sont donc du type : $\boxed{a_0 = k\left(a + \frac{1}{\gamma - 1}h_a\right)}$
      $a_0 \in H \Leftrightarrow kh_a = 0 \Leftrightarrow h_a = 0$ (car $k \neq 0$) $\Leftrightarrow a \in H$ absurde. donc $\boxed{a_0 \notin H}$
   2. Le cardinal de la famille est d la dimension de E . De plus la famille est libre en effet $(h_i)_{i=2}^d$ est un système libre et $a_0 \notin \mathrm{Vect}(h_i)$.
      Dans cette base la matrice de u est diagonale de diagonale $(\gamma, 1, \cdots 1)$
   3. Si on calcule dans cette base soit $x = x_0 a_0 + \sum_{i=2}^d y_i h_i$. On a $u(x) = x_0 \gamma a_0 + \sum_{i=2}^d y_i h_i$. Donc

$$u(x) = \gamma x \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{d} (\gamma - 1) y_i h_i = 0$$

      Or la famille (h_i) est libre et $\gamma \neq 1$. Donc $\forall i, y_i = 0$
      Réciproquement si $x = x_0 a_0$ et si $u(a_0) = \gamma a_0$ alors $u(x) = \gamma x$ par linéarité.

$$\boxed{u(x) = \gamma x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(a_0)}$$

2. Soit $D = \mathrm{Vect}(v)$ une droite stable . Il existe donc un λ tel que $u(v) = \lambda v$. Si on se place dans la base précédente on peut poser $v = x_0 a_0 + \sum_{i=2}^d y_i h_i$. $u(v) = \lambda v$ impose donc $x_0(\gamma - \lambda) a_0 + \sum_{i=2}^d (1 - \lambda) y_i h_i = 0$.

   Comme on a une base on doit résoudre : $x_0(\gamma - \lambda) = 0$ et $\forall i\ (1 -) y_i = 0$

   - si $\lambda \notin \{1, \gamma\}$ on obtient $x_0 = 0$ et $\forall i, y_i = 0$ donc $v = 0$. Absurde $\mathrm{Vect}(v)$ n'est pas une droite
   - si $\lambda = 1$ on a $x_0 = 0$ donc $v \in H$ et $D \subset H$
   - si $\lambda = \gamma$ on a $\forall i, y_i = 0$ donc $v \in \mathrm{Vect}(a)$ et $D = \mathrm{Vect}(a)$

$$\boxed{\text{Les droites stables sont incluses dans } H \text{ ou c'est } E_\gamma}$$

3.

   - si $E_\gamma \subset V$. Soit $v \in V$ on doit montrer $u(v) \in V$. On décompose $v = ka_0 + h$ $(k \in \mathbb{R}, h \in H)$. On a alors $u(v) = \gamma k a_0 + h = v + (\gamma - 1) k a_0$. Or $v \in V$ et $a_0 \in V$ (par l'hypothèse $E_g \subset V$) donc $u(v) \in V$
   - si $V \subset H$ alors tous les éléments de V sont invariants par$\Rightarrow$ u et donc $u(V) = V$

4. On suppose $V \notin H$. il existe donc un vecteur $v \in V - H$. Or H contient 0 . Donc $v \neq 0$ .La droite $D = \text{Vect}(V)$ répond la question. Remarquons que par hypothèse sur V on $D \neq E_\gamma$

   1. F est un sous espace vectoriel contenant E_γ . D'après la question 3 F est stable par u et donc $u(F) \subset F$
   2. Supposons par l'absurde que V soit stable par u . On a alors pour le vecteur v du début de la question $u(v) \in V$. Or $v \in F$ donc $u(v) \in F = \text{Vect}(a_0, v)$. On peut donc décomposer $u(v) = \alpha a_0 + \beta v$
      - si $\alpha = 0$ on a $u(v) = \beta v$ donc $D = \text{Vect}(v)$ est une droite stable . Absurde d'après la question 2 car on supposé que D n'est pas inclus dans H et on sait que $D \neq E_\gamma$.
      - si $\alpha \neq 0$ on a $a_0 = \frac{u(v) - \beta v}{\alpha} \in V$. absurde car $E_\gamma \notin V$

5. synthèse évidente:

$$\boxed{\text{Un sous espace vectoriel est stable si et seulement si il contient } E_\gamma \text{ ou il est contenu dans } H}$$

SECONDE PARTIE

1. Si $u = Id$ le résultat est évident.

   Réciproquement s'il existe a_0 tel que $u(a_0) = a_0$ alors la décomposition usuelle $x = ka_0 + h$ donne $u(x) = x$ car on sait aussi que tout vecteur de H est invariant.

$$\boxed{\exists a_0 \notin H, u(a_0) = a_0 \Leftrightarrow u = Id}$$

2.
   - Existence:Soit alors $a_0 \notin H$ quelconque . On peut décomposer $u(a_0) = a_0 + h_a$ d'après le préliminaire avec $\gamma = 1$. posons alors $c = \frac{h_a}{f(a_0)} \in H$. Ce qui a un sens car $a_0 \notin H \Rightarrow f(a_0) \neq 0$.On donc $u(a_0) = a_0 + f(a_0)c$
     Montrons alors : $\forall x \in E, u(x) = x + f(x)c$:
     On décompose (encore et toujours) $x = ka_0 + h$. On a donc $f(x) = kf(a_0)$ et
     $$u(x) = k\,(a_0 + f(a_0)c) + h = x + kf(a_0)c = x + f(x)c$$
   - Unicité (a_0 n'étant pas unique il n'est pas évident que c est unique)
     Mais si $\forall x : u(x) = x + f(x)c = x + f(x)d$ alors $\forall x : f(x)(c - d) = 0$. Or il existe des vecteurs tels que $f(x) \neq 0$. Donc $c = d$.
     $$\boxed{\text{il existe un vecteur } c \in H \text{ unique tel que } u(x) = x + f(x)c}$$

3. u est un endomorphisme en dimension fini donc u est bijective si et seulement si u est injective.
   Or $x \in \text{Ker}(u) \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x + f(x)c = 0$
   - si $x \notin H$ alors (x, c) est un système libre : absurde car le coefficient de x est non nul.
   - si $x \in H$ on a $f(x) = 0$ donc $x = \overrightarrow{0}$
   - Pour calculer l'inverse on pose $y = x + f(x)c$ et on cherche à calculer x en fonction de y . On a $f(y) = f(x) + fx)f(c) = f(x)$ car $c \in H$. Donc $x = y - f(x)x = y - f(y)c$.
     On vérifie alors que si $\forall x \in E\ g(x) = x - f(x)c$ on a $g \circ f = f \circ g = Id$

$$\boxed{g : x -> x - f(x)c \text{ est la fonction réciproque de } f}$$

4. la base existe par le théorème de la base incomplète.

   1. $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f(a) & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   2. Il suffit de prendre la base $(a, c', h_3 \cdots h_n)$ avec $c' = f(a)c$. C'est une base car $f(a) \neq 0$

5. Il est déjà évident que si $V \subset H$, V est stable par u. et que E est stable par u.

   On a aussi que si $c \in V$ alors V est stable par u : $x \in V \Rightarrow u(x) = x + f(x)c \in V$

   Montrons alors :

$$\boxed{V \text{ est stable par } u \text{ si et seulement si } V \subset H \text{ ou } c \in V}$$

   On a déjà montré une implication.

   Réciproquement soit V stable par u.

   - si $V \subset H$ le résultat est évident
   - sinon il existe $v \in V - H$ on a alors $u(v) = v + f(v)c \in V$ donc $c = \frac{u(v)-v}{f(v)} \in V$. En effet $f(v) \neq 0$ car $v \notin H$.