ENSAIT Concours 2000
Math 1
corrigé

PRELIMINAIRE

Soit a, b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y" + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 .

Ici g étant C^1 la fonction $g+1$ est continue et la fonction nulle est naturellement continue . E est donc un espace vectoriel réel de dimension 2 .

PREMIERE PARTIE

Question 1: L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y" + y = 0$ est l'ensemble des fonctions y telle qu'il existe un réel A et un réel $\phi \in]-\pi, \pi]$ telles que $\forall x, y(x) = A\cos(x + \phi)$

$y(x)$ admet alors une infinité de racines : $\{\frac{\pi}{2} - \phi + n\pi \ , n \in [1.. + \infty[\}$

Question 2 :

Question 2.1:

$\cdot f_1$ est bien C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ car les fonctions $\sin(x)$,$1/x$ et $\cos(x)$ le sont .

$\cdot$de plus pour $x > 0$ $f_1'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + \sin(x)$ et $f_1"(x) = \frac{-\sin(x)}{x} - 2\frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3} + \cos(x)$.

Donc $f_1"(x) + (1 - \frac{2}{x^2})f_1(x) = \left(\frac{-\sin(x)}{x} - 2\frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3} + \cos(x)\right) + \left(\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)\right) - 2\left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{\cos(x)}{x^2}\right)$
$= 0$

$$\boxed{f_1 \in E}$$

$\cdot$On sait que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$ donc f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant :

$$\boxed{f_1(0) = 0}$$

$\cdot$ sin et cos sont développables en séries entière sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infinie . On a donc

$$x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k)!}\right)x^{2k}$$

L'égalité est encore vraie si $x = 0$.$\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle y est donc C^∞ . Par restriction $\boxed{f_1 \text{ prolongée est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+}$.

$\cdot\boxed{f_1(n\pi) = (-1)^{n+1}}$

$\cdot$ Sur chaque intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ f_1 est continue et $f_1(n\pi) \times f_1((n+1)\pi) < 0$ .Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une racine x_n sur chaque intervalle $]n\pi, (n+)\pi[$

$$\boxed{f_1 \text{ admet une infinité de racines}}$$

question 1.2: Comme dans la question précédente $f_2 \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, et

$$\forall x > 0, f_2"(x) + (1 - \frac{2}{x^2})f_2(x) = 2(1-\alpha)\frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

question 1.3:

$\cdot f_1$ et f_2 sont deux éléments de E linéairement indépendants . En effet s'il existe deux réels λ et μ tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ la valeur en $x = \pi$ donne $-\lambda - \frac{\mu}{\pi} = 0$ et celle en $\frac{\pi}{2}$ donne $\frac{2}{\pi}\lambda + \mu = 0$ .Le déterminant du système : $\begin{vmatrix} -1 & -1/\pi \\ 2/\pi & 1 \end{vmatrix} = 2/\pi^2 - 1$ est non nul . Donc $\lambda = \mu = 0$

$\cdot E$ étant un espace vectoriel de dimension 2 il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$\boxed{y \in E \Leftrightarrow y = C_1 f_1 + C_2 f_2}$$

Expression qui peut se transformer en posant $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\phi \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos(\phi) = \frac{C_1}{A}, \sin(\phi) = \frac{C_2}{A}$

$$y(x) = A\left(\frac{\sin(x+\phi)}{x} - \cos(x+\phi)\right)$$

·En particulier $y(\pi/2+n\pi-\phi)=(-1)^{n+1}$ et comme à la question 1.2 on déduit qu'il existe une infinité de racines strictement positive .

question 3 :

question 3.1: le résultat est évident en multipliant par $x^2\neq 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

question 3.2: Supposons qu'il existe des solutions $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout x réel :

$$x^2f"(x)+(x^2-6)f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}-6\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$x^2f"(x)+(x^2-6)f(x)=-6a_0-6a_1+\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n-3)(n+2)a_n+a_{n-2}\right)x^n$$

On veut que cette quantité soit nulle . Donc $a_0=a_1=a_2=0$ et $n\geq 4$ $a_n=-\frac{1}{(n-3)(n+2)}a_{n-2}$.
Une récurrence évidente montre que si n est pair $a_n=0$.
Si n est impair on pose $n=2k+1$ et pour $k\geq 2$ $a_{2k+1}=-\frac{1}{(2k-2)(2k+3)}a_{2k-1}$

$$a_{2k+1}=(-1)^{k-1}\frac{1}{((2k-2)(2k-4)\cdots 4.2)\,((2k+3)\,(2k+1)\cdots 9.7}a_3=(-1)^{k-1}15\frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!}a_3$$

Donc $f(x)=-15a_3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!}x^{2k+1}$. On vérifie par la règle de D'alembert que cette série entière a un rayon de convergence infinie:

$$\forall x\in\mathbb{R},\left|\frac{\frac{(2k+2)(2k+4)}{(2k+5)!}x^{2k+3}}{\frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!}x^{2k+1}}\right|=\frac{(2k+2)(2k+4)}{(2k)(2k+2)(2k+4)(2k+5)}x^2\longrightarrow_{k\to\infty}0$$

$$\boxed{f(x)=-15a_3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!}x^{2k+1}}$$

On peut décomposer $2k(2k+2)=(2k+2)(2k+3)-3(2k+3)=(2k+2)(2k+3)-3(2k+3)+3$
D'où :

$$f(x)=-15a_3\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{3}{x}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}-\frac{3}{x^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\right)$$

$$f(x)=-15a_3\left((\sin(x)-x)+\frac{3}{x}\left(\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{3}{x^2}\left(\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}\right)\right)$$

$$\boxed{f(x)=-15a_3\left(\sin(x)+\frac{3\cos(x)}{x}-\frac{3\sin(x)}{x^2}\right)}$$

DEUXIEME PARTIE

question 1 : On a $y=\lambda\cos+\mu\sin$. Donc en dérivant , compte tenu de $\lambda'\cos+\mu'\sin$: $y'=-\lambda\sin+\mu\cos$ soit en redérivant : $y"=-\lambda\cos-\mu\sin-\lambda'\sin+\mu'\cos$ et comme $y"+(1+g)y=0$ on a :

$$\boxed{\lambda'\sin-\mu'\cos=gy}$$

On a donc un système linéaire d'inconnues les fonctions λ' et μ' . Après résolution :

$$\lambda'=gy\sin\quad,\quad\mu'=-gy\cos$$

question 2 : il existe donc deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$\forall x>0,\lambda=C_1+\int_a^x g(u)y(u)\sin(u)du\quad,\quad\mu(x)=C_2-\int_a^x g(u)y(u)\cos(u)du$$

et donc

$$\boxed{\forall x>0,y(x)=(C_1+\int_a^x g(u)y(u)\sin(u)du)\cos(x)+(C_2-\int_a^x g(u)y(u)\cos(u)du)\sin(x)}$$

question 3 : l'équivalence est une conséquence de la formule :

$$\sin(u-x) = \sin(u)\cos(x) - \sin(x)\cos(u)$$

question4:
On reprend $y(x) = \left(C_1 + \int_a^x g(u)y(u)\sin(u)du\right)\cos(x) + \left(C_2 - \int_a^x g(u)y(u)\cos(u)du\right)\sin(x)$
Si on dérive une fois (possible car on a les primitives de deux fonctions continue) :

$$y'(x) = -C_1\sin(x) + C_2\cos(x) - \left(\int_a^x g(u)y(u)\sin(u)du\right)\sin(x) - \left(\int_a^x g(u)y(u)\cos(u)du\right)\cos(x)$$

Les deux autres termes se simplifiant deux à deux .
Donc :

$$y^{"}(x) = -C_1\cos(x) - C_2\sin(x) - \left(\int_a^x g(u)y(u)\sin(u)du\right)\cos(x) + \left(\int_a^x g(u)y(u)\cos(u)du\right)\sin(x)...$$

$$... - g(x)y(x)\left(\sin(x)^2 + \cos(x)^2\right)$$

On a donc bien $y"(x) + y(x) = -g(x)y(x)$.

TROISIEME PARTIE

question 1 : C'est une conséquence directe de l'intégrabilité de g sur $[1,+\infty[$. En effet si g est intégrable $|g|$ est intégrable et $\lim_{a\to+\infty}\int_a^{+\infty}|g(t)|\,dt = 0$. L'intégrale est donc inférieur à $1/2$ pour a assez grand .
question 2 :

question 2.1:l'image du segment $[a,b]$ par la fonction continue y est un segment . Il admet donc un plus grand élément .

question 2.2:D'après l'inégalité de la moyenne:

$$\left|\int_a^b g(u)y(u)\sin(u-x)du\right| \leq \sup(y(u)\sin(u-x), u\in[a,b])\int_a^b |g(u)du| \leq M_b.1.1/2$$

d'après les majorations des questions précédentes .

question 2.3: On connaît la relation :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \int_a^x g(u)y(u)\sin(u-x)du$$

En particulier pour $x\in[a,b]$, $|y(x)| \leq |C_1| + |C_2| + \left|\int_a^x g(u)y(u)\sin(u-x)du\right| \leq |C_1| + |C_2| + M_b/2$
Le membre de droite ne dépend plus de x c'est donc un majorant de $\{|y(x)|, x\in[a,b]\}$. Donc

$$M_b \leq |C_1| + |C_2| + M_b/2$$

Ce qui équivaut à $M_b \leq 2\left(|C_1| + |C_2|\right)$
En particulier : $\forall b\geq a\ |y(b)| \leq 2\left(|C_1| + |C_2|\right)$.

$$\boxed{\text{y est donc borné sur } [a,+\infty[\text{et } M = \sup(y, y\geq a) \leq 2\left(|C_1| + |C_2|\right)}$$

question 2.4 y étant continue sur tout segment $[\alpha,a]$ y est bornée . Donc par réunion y est borné sur $[\alpha,+\infty[$ si $\alpha\leq a$. Le résultat est évident dans le cas contraire .

L'exemple de f_2 dans la première partie montre que y peut ne pas être bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

question 3 :la fonction g_u est continue sur $[a,+\infty[$ comme produit de fonctions continues .
De plus $\forall x\in[a,+\infty[, |g_u(x)| \leq M\,|g(x)|$ la fonction g_u est donc continue , dominée par $|g(x)|$ intégrable sur $[a,+\infty[$ donc est intégrable sur $(a,+\infty[$

question 4 : On a donc

$$\int_a^x g(u)y(u)\sin(u-x)du = \int_a^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du - \int_x^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du$$

Donc en reportant et en développant $\sin(u-x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ y(x) = C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) - \int_x^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du$$

avec :

$$C_3 = C_1 + \int_a^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u)du \quad , \quad C_4 = C_2 - \int_a^{+\infty} g(u)y(u)\cos(u)du$$

question 5 : La question est équivalente montrer que $\int_x^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du$ a une limite nulle si x tend vers l'infini ; Or

$$\left|\int_x^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du\right| \leq \left|\int_x^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)\right| du \leq M \int_x^{+\infty} g(u)du$$

Comme g est intégrable sur $[a,+\infty[$ ce majorant tend vers 0 . Donc

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(y(x) - C_3\cos(x) - C_4\sin(x)) = 0}$$

question 6 : On peut transformer $C_3\cos(x) + C_4\sin(x) = A\cos(x+\phi)$ avec $A > 0$. On a alors que pour $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - \phi$, $y(x_n) = A(-1)^n + Y_n$ avec $Y_n = y(x_n) - C_3\cos(x_n) - C_4\sin(x_n) \to_{n\to\infty} 0$.

A partir d'un certain rang N on a donc $x_n > 0$ et $|Y_n| < A$. Le signe de $y(x_n)$ est donc $(-1)^n$.

Sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ la fonction continue y admet donc une racine d'après le théorème des valeurs intermédiaires .

$$\boxed{y \text{ admet une infinité de racines}}$$

question 7 : Si $C_3 = C_4 = 0$ la fonction y est nulle sur $[a,+\infty[$:Soit $M = \sup_{[a,+\infty[}(y)$ qui existe d'après la question 3.Comme à la question 2 on a

$$\left|\int_a^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du\right| \leq \frac{M}{2}$$

Comme $C_3 = C_4 = 0$ on a donc $\forall x \geq a$ $|y(x)| \leq \frac{M}{2}$ donc $M \leq \frac{M}{2}$. Comme $M \geq 0$ on a donc $M = 0$

En particulier $y(a) = y'(a) = 0$. Or la fonction nulle est solution évidente de l'équation (Eq) Donc par unicité de la solution d'une équation différentielle $y" + a(x)y\prime + b(x) = c(x)$ vérifiant une condition initiale donnée

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y(x) = 0}$$