Concours commun polytechnique
concours 99 série MP math 1
# PRELIMINAIRES
# PREMIERE PARTIE

I - 1. Pour tout $k \geq 1$, $u_k$ est définie,positive sur l'intervalle $I = ]-1,+\infty[$. D'autre part, pour tout $x \in I$, on a $u_k(x) \sim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ série de Riemann convergente $(3/2 > 1)$ ; $U(x)$ est donc définie pour tout $x \in I$.

I - 2. a) • Soit $k$ un entier quelconque $\geq 2$.$u_k$ est de classe $C^1$ sur $J = [-1,+\infty[$ :

$$u_k'(x) = \frac{-\frac{3}{2}(x+k)^{1/2} - \frac{1}{2}(x+k)^{-1/2}}{\left((x+k)^{3/2} + (x+k)^{1/2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{3(x+k)+1}{(x+k)^{1/2}\left((x+k)^{3/2}+(x+k)^{1/2}\right)^2}$$

Sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $[-1,+\infty]$ on a $a+k \leq x+k \leq b+k$ et comme tout est positif

$$|u_k'(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{3(b+k)+1}{(a+k)^{1/2}\left((a+k)^{3/2}\right)^2} \sim \frac{3}{2}\frac{1}{k^{5/2}}$$

Ce qui assure la convergence normale (donc uniforme) sur tout segment inclus dans $J$.

• D'après ce qui précède: $\begin{cases} u_k \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ \sum u_k \text{ converge ( simplement ) sur} J \\ \sum u_k' \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } J \end{cases}$

$\boxed{\text{Donc la fonction } \sum_{k=2}^{\infty} u_k \text{ est de classe } C^1 \text{ sur l'intervalle } J = [-1,+\infty[}$

I - 2. b)

• $U$ est la somme de $u_1$ et de $\sum_{k=2}^{\infty} u_k$, fonctions de classe $C^1$ sur $I$ ; donc $\boxed{U \text{ est } C^1 \text{ sur } I}$

• D'autre part, la fonction $u_1$ tend vers l'infini en $-1$, et $W$ est bornée au voisinage de $-1$ (car continue sur $[-1,+\infty[$) . $U$ est donc équivalente en $-1$ à $u_1$ ; $\boxed{U(x) \sim_{-1} \frac{1}{(x+1)^{1/2}}}$

I - 3. a) $U$ est continue positive sur $]-1,0]$ et $U(x) \sim_{-1} \frac{1}{(x+1)^{1/2}}$ $\boxed{U \text{ est intégrable sur } ]-1,0]}$

I - 3. b) Le changement de variable $t = \sqrt{x+k}$ de classe $C^1$ sur $[a,b]$ (car $a > -k$) donne

$$\int_{[a,b]} u_k = \int_{\sqrt{a+k}}^{\sqrt{b+k}} \frac{2}{1+t^2} = 2\left(\arctan\sqrt{b+k} - \arctan\sqrt{a+k}\right)$$

On a donc par passage à la limite : $\int_{]-1,0]} u_k = 2\left(\arctan\sqrt{k} - \arctan\sqrt{k-1}\right)$

I - 3. c) $\begin{cases} U \text{ est continue intégrable sur } ]-1,0] \\ \forall k \geq 1, u_k \text{ est continue intégrable sur } ]-1,0] \\ \sum \int_{]-1,0]} |u_k| = \sum \left(2\left(\arctan\sqrt{k} - \arctan\sqrt{k-1}\right)\right) \text{ série qui converge} \\ \text{car } \sum_{k=1}^{N} 2\left(\arctan\sqrt{k} - \arctan\sqrt{k-1}\right) = 2\arctan\sqrt{N} \to \pi \end{cases}$

on peut donc intégrer $U$ terme à terme et $\boxed{\int_{]-1,0]} U = \pi}$

*Remarque : on peut aussi appliquer le théorème de convergence monotone aux sommes partielles car $u_k$ est positive.*

I - 4. a) La série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,+\infty[$ ; en effet

$$\forall x \geq 0\ , \quad \forall k \geq 1\ , \quad 0 \leq |u_k(x)| \leq \frac{1}{(x+k)^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}}$$

On a donc $\begin{cases} \sum u_k \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[ \\ \forall k, \lim_{+\infty}(u_k) = 0 \end{cases}$ donc $\lim_{+\infty}\left(\sum u_k\right) = \sum(0) = 0$

$$\boxed{\lim_{+\infty} U = 0}$$

I - 4. b) Pour $x \in I$ fixé, on pose :

$$h : \forall t \in [1,+\infty[\ ,\ h(t) = \frac{1}{(t+x)^{3/2} + (t+x)^{1/2}}$$

$h$ est continue positive sur son intervalle de définition et $h(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$ , $h$ est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

I - 4. c)

• $h$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ ; on a donc :

$$\begin{aligned}\forall k &\geq 2, \quad \int_k^{k+1} h(t)\,dt \leq h(k) \leq \int_{k-1}^{k} h(t)\,dt\\ \text{pour } k &= 1\ , \quad \int_k^{k+1} h(t)\,dt \leq h(k)\end{aligned}$$

En sommant pour $k$ de 2 à $N$, et en remarquant que $h(k) = u_k(x)$, on a $\sum_{k=2}^N u_k(x) \leq \int_1^N h$ et $\int_1^{N+1} h \leq \sum_{k=1}^N u_k(x)$

On peut alors faire tendre $N$ vers $+\infty$ (la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ et la série converge.

$$\int_1^{+\infty} h \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \leq u_1(x) + \int_1^{+\infty} h$$

L'intégrale qui apparaît se calculent par le changement de variable $v = \sqrt{t+x}$ comme au I-3.B:

$$\int_1^X \frac{dt}{(t+x)^{3/2}+(t+x)^{1/2}} = 2\int_{\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+X}} \frac{dv}{v^2+1} = 2\left(\arctan(\sqrt{1+X}) - \arctan(\sqrt{1+x})\right)$$

et par passage à la limite : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^{3/2}+(t+x)^{1/2}} = 2\left(\pi/2 - \arctan(\sqrt{1+x})\right) = 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{x+1}})$

On en déduit l'encadrement :

$$2\arctan\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \leq u_1(x) + 2\arctan\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

• Or

$$u_1(x) = \frac{1}{(x+1)^{3/2}+(x+1)^{1/2}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$$

et

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{6x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

On a donc : $\boxed{U(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}$

I - 4. d) On a établi que $U(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; cela permet de conclure que $\boxed{U \text{ n'est pas intégrable sur } [0,+\infty[}$

# DEUXIEME PARTIE

II - 5. a) • D'après les premières inégalités de I-4.c avec $x = 0$ :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{3/2}+t^{1/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{3/2}+t^{1/2}}$$

D'où en sommant de $n+1$ à $N$ et en faisant tendre vers l'infini :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}+t^{1/2}} \leq \rho_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}+t^{1/2}}$$

Or

$$\int_x^X \frac{dt}{t^{3/2}+t^{1/2}} = 2\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{X}} \frac{dv}{1+v^2} = 2\left(\arctan(\sqrt{X}) - \arctan\sqrt{x}\right) \to 2\left(\pi/2 - \arctan\sqrt{x}\right) = 2\arctan(1/\sqrt{x})$$

On a donc : $\boxed{m_n \leq \rho_n \leq M_n \text{ avec } m_n = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{n+1}}, M_n = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}$

• Soit $\delta_n = \frac{M_n - m_n}{2} = \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}}$.

$\delta_n$ représente la demi-distance des termes qui encadrent $\rho_n$ ;

si $\delta_n \leq \delta$, alors $S_n + \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}$ est une approximation de $U(0)$ à $\delta$ près.

• Application : on vérifie à la calculatrice que $\delta_2 \leq 0.092 \leq 0.1$ ;

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}} + \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

est une valeur approchée de $U(0)$ à $10^{-1}$ près ;
d'où la valeur numérique demandée : $\boxed{U(0) \text{ est égal à } 1.87 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$

De même, on vérifie que l'on a $\delta_{62} < 10^{-3}$,

donc $\boxed{S_{62} + \arctan\frac{1}{\sqrt{62}} + \arctan\frac{1}{\sqrt{63}} \text{ est une approximation de } U(0) \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$

*Rq: Une autre méthode est applicable, mais donne des résultats beaucoup moins intéressants : il suffit de remarquer que $S_n$ est une approximation de $U(0)$ à $\delta_n$ près, donc à $2/\sqrt{n}$ près (d'après l'inégalité* $\arctan x < x$, *pour $x$ positif). $S_{400}$ est une approximation de $U(0)$ à 0.1 près. Pour obtenir une approximation à $10^{-3}$ près, il faut considérer $S_n$ avec $n = 4\,10^6$.*

II - 5. b) L'encadrement obtenu à la question précédente donne immédiatement $\boxed{\rho_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}}$
II-6: *On retrouve dans cette partie les idées du dernier D.M. : $B_n$ est la primitive de $nB_{n-1}$ ayant une intégrale nulle sur [0,1].*
II - 6. a) $B_0$ existe et est évidemment unique. Supposons l'existence et l'unicité de $B_{n-1}$ ; alors $B_n$ est une primitive de $nB_{n-1}$
soit $\int_0^x nB_{n-1}(t)dt$ la primitive de $nB_{n-1}$ qui s'annule en 0
il existe une constante $k_n$ telle que $B_n = \int_0^x nB_{n-1}(t)dt + k_n$
La condition $\displaystyle\int_{[0,1]} B_n = 0$ est équivalente à $k_n = -\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_0^x nB_{n-1}(t)dt\right) dx$ .
$\boxed{\text{D'où l'existence et l'unicité de } B_n .}$
II - 6. b)
• Pour tout $n \geq 2$, on a $\displaystyle\int_{[0,1]} nB_{n-1} = 0$ ; or $\displaystyle\int_{[0,1]} nB_{n-1} = \int_{[0,1]} B_n' = B_n(1) - B_n(0)$ ; donc

$$\underline{\text{pour tout } n \geq 2,\ B_n(1) = B_n(0) = b_n}$$

• On obtient successivement $\boxed{B_1 = x - \frac{1}{2},\ B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6},\ B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}}$
II - 6. c) Une intégration par parties donne puisque $f$ et $B_1$ sont $C^1$ sur $[0,1]$

$$\int_0^1 f'B_1 = [B_1.f]_0^1 - \int_0^1 f = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \int_{[0,1]} f$$

De nouvelles intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f(0)+f(1)) &= \int_{[0,1]} f + \int_0^1 B_1 f' = \int_{[0,1]} f + \left[\frac{1}{2}B_2 f'\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} B_2 f'' \\
&= \int_{[0,1]} f + \frac{b_2}{2}(f'(1)-f'(0)) - \frac{1}{6}[B_3 f'']_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{6} B_3 f^{(3)} \\
&= \int_{[0,1]} f + \frac{b_2}{2}(f'(1)-f'(0)) - \frac{b_3}{6}(f''(1)-f''(0)) + \int_0^1 \frac{1}{6} B_3 f^{(3)}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait établir.
II - 6. d) L'existence et l'unicité de $Pn$ sont évidentes : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = B_n(x - E(x))$, si $E(x)$ désigne la partie entière de $x$. Il est clair que $P_n$ est de classe $C^\infty$ par morceaux.

$B_n$ est continue sur $[0,1]$ ; $P_n$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est en 0, ce qui est équivalent à $B_n(0) = B_n(1)$ ; on a montré que ceci est réalisé si $n \geq 2$.
Par contre $B_1(0) \neq B_1(1)$ donc $P_1$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ .
*(faire les graphes de $P_1$,$P_2$ pàur mieux voir)*
II - 6. e) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de 6.c appliqué à $g :\ t \to f(t+k)$

$$\frac{1}{2}(g(0)+g(1)) = \int_{[0,1]} g + \sum_{i=2}^{3} (-1)^i \frac{b_i}{i!}\left(g^{(i-1)}(1) - g^{(i-1)}(0)\right) + \int_0^1 \frac{P_3(x)}{6} g^{(3)}(x)$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) = \int_{[k,k+1]} f + \sum_{i=2}^{3}(-1)^i\frac{b_i}{i!}\left(f^{(i-1)}(k+1)-f^{(i-1)}(k)\right) + \int_k^{k+1}\frac{P_3(x)}{6}f^{(3)}(x)$$

En sommant cette égalité pour $k$ variant de $j$ à $j+m-1$ on obtient en simplifiant les $\int$ avec la relation de Chasles et le $\Sigma$par télescopage:

$$\sum_{k=j}^{j+m} f(k) = \frac{1}{2}(f(j)+f(m+j)) + \int_{[j,m+j]} f + \sum_{i=2}^{3}(-1)^i\frac{b_i}{i!}\left(f^{(i-1)}(m+j)-f^{(i-1)}(j)\right) + \int_j^{m+j}\frac{P_3(x)}{6}f^{(3)}(x)$$

II - 7. a) Les variations de $B_3$ se déduisent du signe de $B_3'$ donc de celui de $B_2$ ce qui donne

$$\sup_{x\in[0,1]}|B_3(x)| = B_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \le 6\ 10^{-2}$$

D'où : $\underline{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ |P_3(x)|\le 6\ 10^{-2}}$.

II - 7. b)• $g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{3x+1}{x^{3/2}(x+1)^2}$

• La fonction $-g^{(3)}$ est positive (car $g$" décroît) et $\int_1^x -g^{(3)}(t)dt = g"(1)-g"(x) \to_{x\to+\infty} g"(1)$.
La primitive de la fonction continue positive $(-g^{(3)})$ admet une limite finie. On est dans le cas où on équivalence entre intégrabilité et limite de primitive.
<u>La fonction $-g^{(3)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ ;</u>
Il en est donc de même pour $P_3g^{(3)}$ fonction continue par morceaux positive et dominée par $-g^{(3)}$ . (car $\left|P_3g^{(3)}\right| \le 0,06\left(-g^{(3)}\right)$ )fonction intégrable
II - 7. c) On prend le résultat de la question II-6.e appliqué à la fonction $g$ et on passe à la limite. Comme

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=j}^{j+m} g(k) &= \sum_{k=j}^{\infty} g(k) \qquad \text{car la série } \sum g(k) \text{ converge : } g(k)\sim\frac{1}{k^{3/2}}\\
\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{2}(g(j)+g(m+j)) &= \frac{1}{2}g(j)\\
\lim_{m\to+\infty}\int_j^{m+j} g &= \int_j^{\infty} g \qquad \text{car } g \text{ est intégrable sur } [j,+\infty[ : g(t)\sim\frac{1}{t^{3/2}}\\
\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=2}^{3}(-1)^i\frac{b_i}{i!}\left(g^{(i-1)}(m+j)-g^{(i-1)}(j)\right) &= -\frac{1}{12}g'(j) \qquad \text{car } b_2=\frac{1}{6}\text{ , } b_3=0 \text{ et } \lim_{+\infty}(g')=0\\
\lim_{m\to+\infty}\int_j^{m+j}\frac{P_3(x)}{6}g^{(3)}(x) &= \int_j^{+\infty}\frac{P_3(x)}{6}g^{(3)}(x) \text{ car } P_3g \text{ est intégrable sur } [j,+\infty[
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\boxed{\rho_{j-1} = \int_{[j,+\infty[} g + \frac{1}{2}g(j) - \frac{1}{12}g'(j) + \frac{1}{6}\int_j^{+\infty} P_3\, g^{(3)}}$$

II - 7. d) On a donc établi que

$$\rho_{j-1} = \underbrace{\int_{[j,+\infty[}\frac{1}{x^{3/2}+x^{1/2}}}_{=2\arctan\frac{1}{\sqrt{j}}} + \frac{1}{2}\frac{1}{j^{3/2}+j^{1/2}} + \frac{1}{24}\frac{3j+1}{j^{3/2}(j+1)^2} + \underbrace{\frac{1}{6}\int_j^{+\infty} P_3\, g^{(3)}}_{\Delta_j}$$

Or $|\Delta_j| \le \frac{0.6}{6}\int_j^{+\infty}|g^{(3)}| = 0.1\int_j^{+\infty} -g^{(3)} = 0.1\, g''(j)$ On a donc $|\Delta_j|\le\delta_j$, si $\delta_j = 0.1\frac{15j^2+10j+3}{4j^{5/2}(j+1)^3}$.

$S_{j-1}+2\arctan\frac{1}{\sqrt{j}}+\frac{1}{2}\frac{1}{j^{3/2}+j^{1/2}}+\frac{1}{24}\frac{3j+1}{j^{3/2}(j+1)^2}$ est une valeur approchée de $U(0)$ à $\delta_j$ près. Or, pour $j=5$, on obtient $\delta_5 < 0.001$ ; donc $\boxed{\text{1.860 est valeur approchée de } U(0) \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$

# TROISIEME PARTIE

III - 8. a) Après calcul on obtient

$$v_k(x) - \frac{i}{2}u_k(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+k)(x+k+1)}$$

• Soit $x \in I$ fixé ; on a $|v_k(x) - \frac{i}{2}u_k(x)| \sim_{k\to+\infty} \frac{1}{2k^2}$. La série de terme général $v_k - \frac{i}{2}u_k$ converge donc absolument, et on sait qu'il en est de même pour la série de terme général $u_k$.

$$\boxed{\text{la série } \sum v_k \text{ converge absolument}}$$

• De plus, pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} V(x) - \frac{i}{2}U(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(v_k - \frac{i}{2}u_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{(x+k)(x+k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}\right) = \frac{1}{2(1+x)} \end{aligned}$$

Le calcul de la somme de la série se faisant par télescopage:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \to \frac{1}{x+1}$$

III - 8. b) L'égalité précédente, avec la continuité de $U$, permet de conclure que $V$ est continue sur $I$.
III - 9. a) L'équation différentielle linéaire $T' - VT = 0$ est résolue et la fonction $V$ est continue donc elle admet une solution unique sur $I$ qui vérifie $T(0) = 1$ (théorème de Cauchy-Lipschitz).
Cette solution ne s'annule pas sur $I$ :si il existe $x_0 \in I$ , $T(x_0) = 0$ alors par unicité de la solution nulle en $x_0$ $T$ est la fonction nulle : Absurde car $T(0) \neq 0$

III - 9. b) On a :

$$(T' - VT = 0) \Longleftrightarrow \exists K, \forall x \in I \text{ , } T(x) = K\exp\left(\int_0^x V(t)dt\right)$$

or

$$\int_0^x V(t)dt = \int_0^x \left(\frac{i}{2}U(t) + \frac{1}{2(t+1)}\right) dt = \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{i}{2}\int_0^x U(t)\,dt$$

En donnant à $x$ la valeur 0 on trouve $K = 1$ ; ce qui démontre le résultat donné dans l'énoncé.

$$\boxed{T(x) = \sqrt{x+1}\exp\left(\frac{i}{2}\int_0^x U(t)dt\right)}$$

III - 9. c) D'après 3.c, on a $\lim_{x\to-1} e^{\frac{i}{2}\int_0^x U(t)\,dt} = e^{\frac{i}{2}\int_0^{-1} U} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$. Donc $T(x) \sim_{t->-1} -i\sqrt{1+x}$ qui tend vers 0 quand $x$ tend vers $-1$ ; $T$ se prolonge donc en une fonction continue sur $[-1, +\infty[$ ; d'après l'équivalence précédente, ce prolongement n'est pas dérivable en $-1$.
III - 10. a)La courbe admet pour représentation paramétrique en coordonnées polaires

$$\rho(t) = \sqrt{1+t} \quad , \quad \theta(t) = \frac{1}{2}\int_0^t U(s)\,ds$$

La fonction $f$ : $f(t) = \rho(t)\,\overrightarrow{u}(\theta(t))$ est de classe $C^1$ sur $I$, avec

$$f'(t) = \rho'(t)\overrightarrow{u}(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{u}(\theta(t) + \pi/2).$$

$\rho$ ne s'annule pas, donc $f'$ ne s'annule pas ; $\boxed{\text{l'arc est donc } C^1 \text{ et régulier}}$.

De plus : $\boxed{\tan\psi(t) = \frac{\rho(t)\theta'(t)}{\rho'(t)} = (1+t)U(t)}$ ; donc
$U(0) = \tan\psi(0)$ est la pente de la tangente à $\gamma$ au point de $(x, y) = (1, 0)$ (point de paramètre $t = 0$).
III - 10. b) On a $\lim_{-1} f(t) = 0$ ; le vecteur $f(t) = \rho(t)\,\overrightarrow{u}(\theta(t))$ est vecteur directeur de la droite $D_t$ qui joint le point $O$ au point $f(t)$ ; le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta(t))$ est également vecteur directeur de cette droite $D_t$, et $\lim_{t\to-1} \overrightarrow{u}(\theta(t)) = \overrightarrow{u}(-\pi/2)$ ; on peut donc conclure : l'arc $\gamma$ admet en $O = f(-1)$ une demi-tangente d'angle polaire $-\pi/2$ (verticale dirigée vers le bas).
III - 10. c)

• $\theta$ est une fonction croissante car sa dérivée $U$ est positive, et $\lim_{+\infty} \theta(t) = +\infty$ car la fonction $U$ est positive mais non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir I-4.d)
• $\rho$ est une fonction croissante de 0 à $+\infty$
• Le graphe de $\rho$ est donc une spirale .

# QUATRIEME PARTIE

IV - 11. a) La fonction $\dfrac{e^u}{\sqrt{u}}$ est positive et continue sur $]0,t]$, et $\dfrac{e^u}{\sqrt{u}} \sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ ; elle est donc intégrable sur $]0,t]$. La fonction $g(t) = \int_0^t \dfrac{e^u}{\sqrt{u}}\,du = g(1) + \int_1^t \dfrac{e^u}{\sqrt{u}}\,du$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée $\dfrac{e^t}{\sqrt{t}}$.

IV - 11. b)

• La fonction $e^{-\alpha t}g(t)$ est continue positive sur $]0,+\infty[$ ;
• Elle se prolonge par continuité en 0, car $\lim_0 h_a(t) = 0$ ;
• $t^2 h_\alpha(t) \to_{t\to+\infty} 0$ car $0 \leq t^2 e^{-\alpha t}\left(g(1) + \int_1^t \dfrac{e^u}{\sqrt{u}}du\right) \leq t^2 e^{-\alpha t} g(1) + t^2 e^{-\alpha t}\int_1^t e^u du \leq t^2 e^{-\alpha t} g(1) + t^2 e^{(1-\alpha)t}$

et donc $h_a$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• Une intégration par parties donne

$$\int_X^x e^{-\alpha t} g(t) = \int_X^x e^{-\alpha t}\left(\int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du\right)dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du\right]_X^x + \int_X^x \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$$

D'après l'étude qui précède $0 \leq e^{-\alpha x}\displaystyle\int_0^x \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du \leq e^{-\alpha x} g(1) + e^{(1-\alpha)x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\int_0^x \dfrac{e^u}{\sqrt{u}}\,du = 0$ $(\alpha > 1)$.
et $\lim_{X\to 0}\left(\frac{e^{-\alpha X}}{-\alpha}\int_0^X \dfrac{e^u}{\sqrt{u}}\,du\right) = 0$ car $\frac{e^u}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$

Donc en prenant la limite pour $x \to +\infty$ et $X \to 0$ de l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} h_a &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{e^{(1-\alpha)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\,ds \qquad \text{par le changement de variable } s = (\alpha-1)t \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}\end{aligned}$$

IV - 11. c) $u_k(x) = \dfrac{1}{(k+x)^{3/2} + (k+x)^{1/2}} = \dfrac{1}{(x+k+1)\sqrt{x+k}}$ Donc $\boxed{u_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} h_{x+k+1}(t)\,dt}$

IV-11.d)Dans cette question, $x > -1$ est fixé.

- Le changement de variable $u = v^2$ dans $F(t)$ donne : $F(t) = \dfrac{e^{-t}}{2}\int_0^t \dfrac{e^u}{\sqrt{u}}\,du = \dfrac{e^{-t}}{2}g(t)$ donc

$$\frac{1}{t}\phi(t)F(t)e^{-xt} = \frac{1}{e^t-1}\frac{e^{-(1+x)t}}{2}\int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2(e^t-1)}h_{1+x}(t)$$

- D'après 11.c :

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} h_{x+k+1}(t)\,dt$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Les fonctions } h_{x+k+1} \text{ sont continues intégrables sur } \mathbb{R}^{=*} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty} h_{x+k+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(x+k+1)t}g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{e^{-(x+1)t}}{e^t-1}g(t) = \dfrac{2}{t\sqrt{\pi}}\phi(t)F(t)e^{-xt} \text{ continue sur } \mathbb{R}^{+*} \\ \int_0^{+\infty}|h_{x+k+1}| = \frac{\sqrt{\pi}}{(x+k+1)\sqrt{x+k}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{k^{3/2}} \text{ et donc } \sum\int_0^{+\infty}|h_{x+k+1}| \text{ converge.}\end{array}\right.$$

Donc
$\dfrac{2}{t\sqrt{\pi}}\phi(t)F(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ ( donc aussi $\dfrac{1}{t}\phi(t)F(t)e^{-xt}$) et on peut intégrer termes à termes

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} h_{x+k+1}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h_{x+k+1}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{2}{t}\phi(t)F(t)e^{-xt}$$

. IV - 12. La fonction $\frac{\sqrt{\pi}}{2}U(x)$ s'écrit $\sqrt{\pi}U(x) = \int_{]0,+\infty[}\lambda(x,t)\,dt$
avec $\lambda(x,t) = \frac{\phi(t)F(t)}{t}e^{-xt} = \dfrac{t}{e^t-1}\dfrac{1}{t}g(t)e^{-(1+x)t}$

Soit $[a,b] \subset ]-1,+\infty[$ fixé.

- $\lambda$ est continue sur $[a,b]\times]0+\infty[$

• $\forall\ (x,t) \in [a,b]\times]0+\infty[,\ |\lambda(x,t)| \leq \dfrac{t}{e^t-1}\dfrac{1}{t}g(t)e^{-(1+a)t} = \frac{\phi(t)F(t)}{t}e^{-at}$ fonction indépendante de $x$ , intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (question IV-11.d si $x=a$ ).
• $\lambda$ est de classe $C^1$, avec $\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t) = -t\lambda(x,t)$.On a donc ,

$$\forall(x,t) \in [a,+\infty[\times]0+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t)F(t)e^{-at}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ , prolongeable par continuité en $t=0$
En reprenant les majorations du IV-11.b :
$t^2\left(\phi(t)F(t)e^{-at}\right) = t^2\phi(t)\frac{e^{-t}}{2}g(t)e^{-at} = \frac{1}{2}\frac{t}{e^t-1}t^2e^{-t}g(t)e^{-at} \sim \frac{1}{2}t^3e^{-(2+a)t}g(t) \leq t^3e^{-(2+\alpha)t}g(1) + t^3e^{-(1+\alpha)t} \rightarrow_\infty 0$
• L'étude précédente est valable pour tout segment inclus dans $]-,+\infty[$. Donc :

$$\boxed{U \text{ est } C^1 \text{ sur } I, \text{ avec } U'(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\phi(t)F(t)e^{-xt}\,dt}$$

$U'$ est évidemment négative, donc $U$ est décroissante sur $I$.

- Une étude analogue montre que $U$ est $C^\infty$ sur $I$, avec, pour tout $k \geq 1$ :

$$U^{(k)}(x) = (-1)^k\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{k-1}\phi(t)F(t)e^{-xt}\,dt$$

- En particulier

$$U''(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t\phi(t)F(t)e^{-xt}\,dt$$

Ce qui permet d'affirmer que $U$ est convexe sur $I$.

- On a établi précédemment les résultats suivants:

$\lim_{+\infty} U = 0$ (voir I-4),
$U \sim_{-1} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \rightarrow +\infty$.

On peut donc donner l'allure du graphe de $U$ :