GCP 2001
COMPOSITION de MATHEMATIQUE II
(Série MP)

v

GCP 2001
Math II MP
Partie I

1) En développant par rapport à la première ligne on trouve $\det C_P = (-1^n a_0$, d'où le résultat.
2) Le plus rapide est de développer par rapport à la dernière colonne, on trouve alors

$$\chi_{C_P}(X) = (-a_{n-1} - X)\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -X & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & -X \end{vmatrix} + a_{n-2}\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -X & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & -X & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{vmatrix} - \dots$$

et on reconnaît $(-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0) = (-1)^n P(X)$.
remarque : si on développe par rapport à la première ligne on a en notant $\psi(a_0, \cdots a_n)$ le déterminant $\psi(a_0 \cdots a_n) = (-1)^n a_0 - X\psi(a_1 \cdots a_n)$ et le résultat par récurrence.
Donc $\boxed{k = (-1)^n}$.
3) Il faut et il suffit que le terme dominant de Q soit $(-1)^n X^n$:

- Si A existe on sait par le cours que le terme dominant du polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$
- Réciproquement si le coefficient est $(-1)^n X^n$ le calcul précédent donne une matrice compagnon qui admet Q comme polynôme caractéristique en partant de $P = (-1^n Q$

a) Les valeurs propres sont les racines de χ qui se calcule par un déterminant; or le déterminant est invariant par transposition: $\det({}^tC_p - I_n) = \det(C_p - \lambda I_n)$

b) on a ${}^tC_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$; si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vient le système

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [1 \ldots n]\ ,\ x_i = \lambda^{i-1}x_1 \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \ddots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

c) On vient de constater que les espaces propres sont tous limités à des droites; la matrice ${}^tC_P$ est donc diagonalisable si et seulement si il y a assez de telles droites pour engendrer l'espace entier, c'est à dire si P a n racines distinctes (et donc simples).
La réciproque est du cours (puisque $P = \pm\chi_{{}^tC_P}$).

$$\boxed{C_p \text{ est diagonalisable si et seulement si } P \text{ est scindé à racines simples}}$$

d) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise ${}^tC_P$ est $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \ddots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible puisque matrice de passage ! Bien sûr son déterminant est connu.

5a) Méthode hors programme en PC .

b) *Analyse : si f est nilpotente d'ordre n son polynôme caractéristique est $(-1)^nX^n$. Donc $P = X^n$. Ce qui donne l'allure de la matrice à chercher. Construire la base demandée est alors un grand classique sur les matrices nilpotentes:*
On commence par utiliser l'hypothèse: on prend un vecteur e_1 tel que $f^{n-1}(e_1)$ soit non nul, on alors $f^n(e_1) = 0$ et on prend les vecteurs $f(e_1) = e_2, \dots, f^k(e_1) = e_{k+1}$.
La famille ainsi construite $(e_1, \dots, e_n)$ est une base:En effet elle est libre (et son cardinal est n) par l'absurde:
Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ et s'il existe un i tel que $\lambda_i \neq 0$ on prend p le plus petit . Ainsi $\sum_{i=p}^n \lambda_i f^i(e_1) = 0$ avec $\lambda_p \neq 0$. En composant l'égalité par f^{n-p-1} il reste $\lambda_p f^{n-1}(e_1) = 0$. Absurde.
Dans cette base, on a bien

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II

6) Par hypothèse, on a pour tout $i = 1 \dots n$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.|x_j| \leq r_i \|X\|_\infty$$

7) Soit i un indice tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$ (il existe car la famille (x_i) est finie), dans les conditions de la question précédente.
On a alors $|\lambda| \leq r_i$, c'est à dire $\lambda \in D_i$.
Ceci est vrai pour n'importe quelle valeur propre, qui appartiendra donc à l'un des disques D_i. Au total,

$$\boxed{Sp(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k}$$

(qui d'ailleurs n'est autre que le disque $D_{\max(r_i)}$).
8) On va se servir de la première partie ! En effet, les racines de P sont les valeurs propres de sa matrice compagne C_P. Or

$$r_1 = |a_0| \quad r_2 = 1 + |a_1| \quad \dots \quad r_n = 1 + |a_n|$$

comme on le lit sur la matrice C_P. En appliquant la question précédente, on en déduit que toutes les racines de P sont dans le disque $D_R = \bigcup_{k=1}^n D_k$ où $R = \max r_k$.
9) A l'ordre près des exposants on peut supposer que a soit le plus grand des quatre entiers a, b, c, d . Posons

$$P(X) = X^a + X^b - X^c - X^d$$

La matrice C_P ne contient que des $0, \pm 1$ et on a avec les notations de la question précédente $R = 2$.
Les seules racines entières possibles sont donc $0, 1, 2$.

Reste à exclure le dernier cas: or si 2 est racine, on a (avec par exemple $c > d$, sinon c et d jouant des rôles symétriques ...)

$$2^b(1+2^{a-b}) = 2^d(1+2^{c-d})$$

Donc si $b > d$ on a $2^{b-d}(1+2^{a-b}) = (1+2^{c-d})$ .Un nombre pair est égal à un nombre impair : absurde.
de même si $d > b$.

$$\boxed{\text{Donc les seules racines dans } \mathbb{N} \text{ de } n^a + n^b = n^c + n^d \text{ sont 0 et 1}}$$

Partie III

remarque : On généralise dans cette partie l'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 dans le cas où les racines sont simples. Les questions 10 , 11 , 12 sont les mêmes que la démonstration pour les suites d'ordre 2 . Seule la fin change pour vérifier qu'on a un base de solutions avec des suites géométriques.

10) Remplaçons $u(n)$ par λ^n: on a bien $\lambda^{n+p} + a_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \ldots + a_0\lambda^n = 0$ dès que $P(\lambda) = 0$.

11)

- Tout d'abord, φ est linéaire (ses composantes sont des formes linéaires).
- φ est injective car si $\varphi(u) = (0)$ on a $u(0) = u(1) = \cdots = u(p-1) = 0$ et par une récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(n) = 0$. Donc u est la suite nulle.
- φ est surjective car la donnée de $u(0), u(1), \cdots u(p-1)$, donne les conditions initiales qui définissent la suite u .
- $\boxed{\text{Donc } F \text{, isomorphe à } \mathbb{C}^p \text{, est de dimension } p.}$

12a) $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \ldots - a_0e_i(0) = -a_i$.
b) Les e_i sont l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1}.
remarque : ou bien vérifier aussi libre et bon cardinal.
c) La suite u et la suite $\sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$ sont deux éléments de F qui commencent par les p mêmes termes, à savoir $\varphi(u) = (u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$.
Elles sont donc identiques: (récurrence évidente)
13) $f(\lambda u + \mu v)$ est par définition la suite de terme général

$$(\lambda u + \mu v)(n+1) = \lambda u(n+1) + \mu v(n+1)$$

C'est donc $\lambda f(u) + \mu f(v)$ ce qui prouve la linéarité de f: ainsi $f \in \mathcal{L}(E)$.
Enfin, la relation de récurrence qui définit F devant être vraie pour tout n sera vraie pour tout $n+1$ ce qui signifie que $f(F) \subset F$, $\boxed{F \text{ est stable par } F.}$
14) Cela résulte de **12a)**: en effet, $e_i(p) = -a_i$ et donc comme

$$e_i = (0,0,0,\ldots,0, \underset{\text{rg } i}{1}, 0, \ldots, \underset{\text{rg } p}{-a_i}, \ldots)$$

$$f(e_i) = (0,0,0,\ldots,0, \underset{\text{rg } i-1}{1}, 0, \ldots, \underset{\text{rg } p-1}{-a_i}, \ldots) = e_{i-1} - a_ie_{p-1}$$

En écrivant ceci en colonnes pour $i = 0 \ldots p-1$, on obtient la matrice de f dans la base (e_i) et on reconnaît ${}^tC_P$.

15a) D'après **4c)**, ${}^tC_P$ est diagonalisable et une base de vecteurs propres est donnée par les colonnes de $V = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \ldots & \lambda_{p-1} \\ \ddots & & \\ \lambda_1^{p-1} & \ldots & \lambda_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$
où les λ_i sont les racines de P .
b) Tout élément de F s'écrit dans cette base qui est constituée de suites géométriques (cf **10**)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1}}$$

16) Les racines de $P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$ sont a, b et c.
Ces réels étant supposés distincts, tout est fini: une base de l'espace F est constituée par les trois suites géométriques $(a^n), (b^n), (c^n)$ et tout élément de F s'écrit

$$\boxed{u_n = \alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n}$$

où α, β, γ sont fonction des valeurs initiales u_0, u_1, u_2.

Partie IV

Notons que par la première partie, $\chi_A = \chi_{C_A} = (-1)^n P$.

17 D'après l'étude du I une matrice compagnon est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. Il suffit de prendre pour A n'importe quelle matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propre multiple. $A = I_n$ ou $A = 0$ sont par exemple solution.
remarque : on peut aussi constater que toute matrice compagnon est de rang supérieur à n-1 . Toute matrice de rang inférieur à n-2 convient aussi comme contre exemple.
18) Supposons $(**)$, c'est à dire que (U, C_U) et (V, C_V) sont simultanément semblables: comme le rang est invariant par changement de base, on a donc $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$ soit :

$$\mathrm{rg}(U-V) = \mathrm{rg}(C_U - C_V) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne peut être nulle: on aurait $\mathrm{rg}(U-V) = 0$ et donc $U = V$ ce qui est exclu. Donc elle est de rang 1, ce qui prouve $(*)$.

$$\boxed{(**) \Rightarrow (*)}$$

19) Il suffit de reprendre un exemple inversible de la question **17** pour U (on est sur que P n'existera pas si U et C_U ne sont pas semblables) puis d'ajouter à U n'importe quelle matrice de rang 1 . Par exemple
Prenons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
20) Par le théorème du rang, $\underline{H \text{ est un hyperplan}}$.
21a) Par l'absurde : si $F \subset H$ on a $u_F = v_F$ et donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$. Mais $\chi_{u_F} | \chi_u$ et $\chi_{v_F} | \chi_v$, Toute racine de χ_{u_F} dans $\mathbb{C}$ est racine commune à χ_u et χ_v (et il existe une telle racine car $d^{\circ}(\chi_{u_F}) = \dim F) > 0$.
Donc $F \not\subset H$.
b) Soit $x \in F \setminus H$: alors H et x engendrent E puisque H est un hyperplan et $x \notin H$. Cela signifie que $F + H = E$.
On utilise deux fois le théorème de la base incomplète en partant d'une base de $F \cap H$ que l'on complète dans F, puis dans H.Il existe une base $(f_i) \cup (g_j) \cup (h_k)$, (f_i) base de $F \cap H, (f_i) \cup (g_j)$ base de F , $(h_k) \in H$
Si on prend la matrice de u (et v)dans cette base elle est triangulaire par bloc car F est stable par u .
On a par blocs

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} U_1 & ? \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & ? \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices U_2 et V_2 coïncident, puisque $u(x) = v(x)$ pour $x \in H$ (en fait, même les sous-matrices au dessus de celles-ci sont égales aussi).
En calculant par blocs les polynômes caractéristiques on a $\chi_u = \chi_{u_1}.\chi_{u_2}$ et $\chi_v = \chi_{v_1}\chi_{v_2}$. Toute racine de $\chi_{u_1} = \chi_{v_1}$ est racine commune de χ_u et χ_v . Absurde.
c) $\boxed{\text{Les seuls sous-espaces stables à la fois par } u \text{ et } v \text{ sont } E \text{ entier et } \{0\}}$
22a) u^j est, comme u, un automorphisme, qui conserve la dimension: donc $G_j = u^{-j}(H)$ est, comme H, un hyperplan.
b) On a $\dim G_0 = \dim H = n-1, \dim G_0 \cap G_1 \geq n-2, \dots \dim G_0 \cap \dots \cap G_{n-2} \geq 1$ en vertu du
car si H_1 est un hyperplan et F un sev, on a $\dim(F \cap H_1) \geq \dim F - 1$. car $F \cap H_1 = F$ ou est un hyperplan de F .
c) Un tel y existe d'après la question précédente.
La famille $\{y, u(y), \dots, u^q(y)\}$ ne peut être libre pour toute valeur de p (elle est lie dès que $q > n$), soit donc p maximal tel que la famille $\mathcal{F} = \{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$ soit libre et $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$
Nous voulons montrer que $F = E$ c'est à dire que $p = n$.

- On a $u^p(y) \in F$ par définition de p . Et par récurrence $q \geq p$, $u^q(y) \in F$
- D'abord notons que $e_0, e_1, \dots, e_{n-2} \in H$ par définition même de y.
  Supposons par l'absurde $p < n$, on a donc $F \subset H$.
- F est stable par u car l'image par u de la base $\mathcal{F}$ est encore dans F : $u^p(y) \in F$
- pour tout $x \in F$ on a $v(x) = u(x) \in F$ puisque $F \subset H$ et $v_F = u_F$. Donc F est stable par v lui aussi.
- Nous sommes arrivés à une impossibilité d'après **21c)**.

Donc $F = E, p = n$ et

$$\boxed{B'' = \mathcal{F} \text{ est une base de } E}$$

d)On a $u\left(e_i\right) = u\left(u^i(y)\right) = u^{i+1}(y) = e_{i+1}$ pour mi$\leq n-1$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$" est donc une matrice compagnon. Soit P le polynôme tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}"}(u) = C_P$. On a $P = (-1)^n \chi_{C_p} = (-1)^n \chi_U$. Donc $C_P = C_U$

e) Récapitulons: on a montré que le changement de base vers $\mathcal{F}$ change U (resp. V) en C_U (resp. C_V). Nous avons donc montré $(**)$.

$$\boxed{\text{Si les polynômes carctéristiques n'ont pas de racine commune } (*) \Rightarrow (**)}$$