ESIM PC 1999 math 1
PRELIMINAIRES

1. $f(x,y)$ est défini si et seulement si:

$$\boxed{y \neq 1, y \neq -1 \text{ et } (x+y)(1+xy) > 0.}$$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,:

- $x + y = 0$ est l'équation de (d), la deuxième bissectrice des axes.$x + y > 0$ caractérise les points du "demi-plan ouver situé au-dessus de (d)"
- $1 + xy = 0$ est l'équation de l'hyperbole équilatère (H), dont les axes du repère sont les asymptotes. Entre les deu branches de l'hyperbole, on a $xy + 1 > 0$. Pour les autres points du plan on a $xy + 1 \leq 0$.
- Les points du plan où $(x + y)(1 + xy) > 0$ sont ceux pour lesquels les deux quantités $x + y$ et $1 + xy$ sont non nulles o de même signe.
- Cet ensemble D' ne rencontre pas la droite $y = -1$ mais il rencontre la droite $y = 1$. Il faut ôter de D' les points de cett droite pour obtenir l'ensemble de définition D de f.

L'ensemble D' des points (x, y) qui vérifient $(x + y)(1 + xy) > 0$ peut être vu comme l'image réciproque de $]0, +\infty[$, ouvert d $\mathbb{R}$, par l'application $(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto (x+y)(1+xy) \in \mathbb{R}$. Cette application est polynômiale, donc continue, donc D' est un ouver de $\mathbb{R}^2$.
De même, l'ensemble des points (x, y) qui vérifient $y \neq 1$ peut être vu comme l'image réciproque de $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, qui es un ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application continue $(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto y - 1 \in \mathbb{R}$. Comme intersection de deux ouverts,

$$\boxed{D \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$$

2. $\forall (x, y) \in D, \quad 1 + xy \neq 0$ donc $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$, quotient de deux fonctions polynômes, est C^1 sur D, à valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$.Pa composition par ln, qui est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $(x, y) \mapsto \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ est C^1 sur D.
$\forall (x, y) \in D, \quad 1 - y^2 \neq 0$ donc $(x, y) \mapsto \frac{1}{1-y^2}$ est C^1 sur D. Comme produit de fonctions C^1,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur } D.}$$

3.On a sur D : $f(x, y) = \frac{1}{1-y^2}\left(\ln(|x+y|) - \ln(|1+xy|)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(1-y^2)}\left[\frac{1}{x+y} - \frac{y}{1+xy}\right] = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$$

et

$$(1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2yf(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1-y^2\right)f(x, y)\right) = \frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)}$$

on vérifie alors que f est solution de (E) sur l'ouvert D.

4. Il est clair que si $x > 0$ et $y \in]0, 1[$, le couple (x, y) est dans D, ainsi que le couple $(1/x, y)$.
Pour un tel couple $f(1/x, y) = \frac{1}{(1-y^2)}\ln\left(\frac{1+xy}{x(1+y/x)}\right) = \frac{1}{(1-y^2)}\ln\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)$ donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \forall y \in]0, 1[, \quad f(1/x, y) = -f(x, y).}$$

5. Là aussi, si $x \in [0, +\infty[$, et $y \in]0, 1[$, le couple (x, y) est dans D.Soit $\phi_y(x) = \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ qui est C^1 sur $[0, +\infty[$. On $\phi_y'(x) = \frac{1-y^2}{(x+y)(1+xy)} > 0$.$\phi_y$ est donc croissante de $\phi_y(0) = \ln(y)$ à $\lim_{+\infty}(\phi_y) = -\ln(y)$.

$$\boxed{\left|\ln\left[\frac{x+y}{1+xy}\right]\right| \leq |\ln y|}$$

6. $f(0, y) = \frac{1}{1-y^2}\ln(y)$ est définie, continue, négative sur $]0, 1[$, équivalente, quand $y \to 1^-$, à $\frac{y-1}{1-y^2} = \frac{-1}{1+y} \to -\frac{1}{2}$.
$f(0, y)$ est donc prolongeable par continuité sur $]0, 1]$ et donc intégrable sur $[1/2, 1[$
$|f(0, y)|$ est équivalente, quand $y \to 0^+$, à $|\ln y|$, dont on sait qu'elle est intégrable sur $]0, 1/2]$.
Finalement $f(0, y)$ est intégrable sur $]0, 1[$.
Pour tout x fixé, avec $x \geq 0$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $]0, 1[$ et, d'après **5.**, vérifie $|f(x, y)| \leq |f(0, y)|$. Donc, pa comparaison,

$$\boxed{y \mapsto f(x, y) \text{ est intégrable sur }]0, 1[}$$

PARTIE I: ETUDE DE F

On a donc, pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_{]0,1[} \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) dy$.

7.a) f est continue sur $[0,+\infty[\times]0,1[$.

De plus: $\forall(x,y) \in [0,+\infty[\times]0,1[, |f(x,y)| \leq |f(0,y)|$, qui est continue, intégrable sur $]0,1[$, indépendante de x.

Par application du théorème de domination pour une intégrale dépendant d'un paramètre:

$$\boxed{F \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

7.b) Pour tout $x > 0$, on a $f(1/x,y) = -f(x,y)$. Il en résulte: $\forall x > 0, F(\frac{1}{x}) = -F(x)$, donc $\boxed{F(1) = 0.}$

7.c) Quand $x \to +\infty$, $1/x \to 0^+$ donc $F(1/x) \to F(0)$, puisque F est continue en 0. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(F(x)) = -F(0).}$$

8.a)5/2 On trace le graphe de φ.

φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, elle est égale en tout point à la somm de sa série de Fourier. Calculons les coefficients:

φ est paire, donc les b_n sont nuls et:

- $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t dt = \pi$.
- Pour $n > 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt dt = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n}dt\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right]$.

Donc a_{2n} est nul et $a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$. $\boxed{\forall x, \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.}$

En particulier pour $x = 0$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

8.a)3/2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

8.b) On sait que $\forall y \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-y^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n}$ (série géométrique). Donc $\forall y \in]0,1[$, $\frac{\ln y}{1-y^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n}\ln y$.

- Pour tout entier n, la fonction $u_n : y \mapsto y^{2n}\ln y$ est continue, négative sur $]0,1[$,
- u_n est intégrable sur $]0,1[$: prolongeable par continuité en 0 et 1 si $n > 0$, et fonction de référence si $n = 0$.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$, avec pour somme la fonction $y \mapsto \frac{\ln y}{1-y^2}$, qui est intégrable sur $]0,1[$ (c'es $f(0,y)$).
- La série $\sum \int_{]0,1[} \left|y^{2n}\ln y\right| dy = \sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ est donc convergente (cf le calcul qui suit)
- On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions:

on a le calcul $\int_{]0,1[} y^{2n}\ln y dy = \left[\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\ln y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{2n}}{2n+1}dy = -\frac{1}{(2n+1)^2}$. .

On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions et intégrer la série terme à terme:

$$F(0) = \int_{]0,1[} \frac{\ln y}{1-y^2}dy = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{]0,1[} y^{2n}\ln y dy = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Finalement: $\boxed{F(0) = -\frac{\pi^2}{8}.}$

9.a)

- f admet sur l'ensemble $[0,+\infty[\times]0,1[$ une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$ continue.
- Sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$ on a $0 < \frac{1}{(x+y)(1+xy)} \leq \frac{1}{(a+y)(1+ay)} = g(y)$.
- g est définie,indépendante de x , continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $]0,1[$.
- f est continue dominée sur $P = [0,+\infty[\times]0,1[$ écf **7.a)**
- On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale à la fonction F sur tout segment inclus dar $]0,+\infty[$, donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec

$$\boxed{F'x) = \int_{]0,1[} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy = \int_{]0,1[} \frac{1}{(x+y)(1+xy)}dy.}$$

9.b) Pour faire le calcul de $F'(x)$, on décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{(x+y)(1+xy)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{x+y} - \frac{x}{1+xy}\right)$$

et donc:

$$F'(x) = \left[\frac{1}{x^2-1}\left(\ln(x+y) - \ln(1+xy)\right)\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}}$$

9.c) $F'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln(x)}{(x-1)}\frac{1}{(x+1)}$, qui tend vers 1/2 quand x tend vers 1.
Comme $F'(1)$ est la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1: $\boxed{F'(1) = \frac{1}{2}}$
Quand x tend vers 0, $F'(x)$ est équivalent à $-\ln x$ et tend donc vers $+\infty$. On sait que, dans ces conditions F n'est pas dérivab en 0 et la courbe représentative admet une $\boxed{\text{demi-tangente verticale en } x=0.}$
10.) F' est > 0 sur $]0, +\infty[$ donc F est croissante de $F(0) = -\frac{\pi^2}{8}$ à $\lim_{+\infty}(F) = \frac{\pi^2}{8}$. On peut même préciser que $F''(x) = -\frac{x^2+1}{x(1-x^2)^2}$, négatif sur $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$: la courbe est concave.

PARTIE II: RESOLUTION DE (E)

11.a)

- Posons $u = x+y$ et $v = xy$ donc $\Psi(x,y) = (u,v)$.
- $\forall (x,y) \in$, $u^2 - 4v = (x-y)^2 > 0$: Ψ est bien à valeurs dans $'$.
- Réciproquement, (u,v) étant fixé dans $'$, cherchons (x,y) vérifiant: $u = x+y, \quad v = xy \quad y < x$.

  Cela équivaut à dire que x et y sont les racines de l'équation $t^2 - tu + v$, x étant la plus grande. Comme cette equatio admet un discriminant $u^2 - 4v$ strictement positif, cette équation admet effectivement deux racines distinctes.

  Le couple (u,v) admet donc un antécédent unique par Ψ , $(x,y) = \left(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}, \frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}\right)$;
- Ψ est donc une bijection de vers $'$.
- Cette bijection est de classe C^1 car ses deux composantes sont polynômiales. Ψ est une bijection de classe C^1 de su $'$.

11.b) La matrice jacobienne de Ψ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$. Le jacobien de Ψ au point (x,y) est $x-y$. En tout point de , il est no nul.
Ψ est donc une application injective de classe C^1 sur un ouvert .De plus la matrice jacobienne est toujours inversible donc

$$\boxed{\Psi \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de classe } C^1 \text{ de } \quad \text{sur } \quad '}$$

12.a) On donne g de classe C^1 de vers $\mathbb{R}$. Ψ étant un C^1-difféomorphisme de classe C^1 de sur $'$, Ψ^{-1} existe et est d classe C^1 de $'$ sur . Posons donc $h = g \circ \Psi^{-1}$, ce qui assure que h est de classe C^1 de $'$ vers $\mathbb{R}$ et que $g = h \circ \Psi$, autremen dit $g(x,y) = h(x+y, xy)$.
On a trouvé h de classe C^1 de $'$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in$, $g(x,y) = h(x+y, xy)$.
12.b) En utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée, on obtient
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial v}(x+y, xy) + y\frac{\partial h}{\partial v}(x+y, xy)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial u}(x+y, xy) + x\frac{\partial h}{\partial v}(x+y, xy)$.
L'égalité sur de $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ équivaut donc à la nullité de $(y-x)\frac{\partial h}{\partial v}(x+y, xy)$ sur , ou encore, puisque $y-x$ es non nul sur , à celle de $\frac{\partial h}{\partial v}$ sur $'$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \ , \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad \text{équivaut à:} \quad \forall (u,v) \in \ ', \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0.}$$

13.a) La fonction th est un C^1-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et H est C^1 sur $_1$.
Par composition et produit, $G(u,v) = (1 - \operatorname{th}^2 v)H(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v)$ est donc C^1 sur et:

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = (1 - \operatorname{th}^2 v)(1 - \operatorname{th}^2 u)\frac{\partial H}{\partial x}(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v)$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = -2\operatorname{th} v(1 - \operatorname{th}^2 v)H(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v) + (1 - \operatorname{th}^2 v)^2\frac{\partial H}{\partial y}(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v)$$

. **13.b)** H vérifie (E) sur l'ouvert $\ _1$; nous pouvons donc recopier l'égalité (E) en remplaçant φ par H et le couple (x, y) pa un couple quelconque $(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v)$ tel que $\operatorname{th} v < \operatorname{th} u$, autrement dit $v < u$.
En utilisant **13.a)**, l'égalité obtenue équivaut à $\forall (u, v) \in \ , \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial G}{\partial v}(u, v)$.
Utilisons la question **12)** en y remplaçant les lettres u et v par $U = u + v$ et $V = uv$
La propriété $\forall (u, v) \in \ , \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial G}{\partial v}(u, v)$ équivaut à $\forall (U, V) \in \ ', \frac{\partial h}{\partial V}(U, V) = 0$, avec ici $G = h \circ \Psi$.
Cela équivaut à dire que h est une fonction de U seulement et comme, quand (U, V) décrit $\ '$, U prend toute valeur réell cette fonction doit être C^1 sur $\mathbb{R}$.Notons F cette fonction
Donc, quand (u, v) décrit $\ $, $G(u, v)$ est de la forme $F(u + v)$ avec F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc
$H(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 v} F(u + v)$. Posons alors $\Phi = F \circ \operatorname{th}^{-1}$. Par composition, Φ est C^1 de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$ et
$H(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 v} \Phi(\operatorname{th}(u + v)) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 v} \Phi\left(\frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}\right)$, quel que soit le couple (u, v) tel que $v < u$.
Pour tout (x, y) dans $\ _1$, on a donc $\boxed{H(x, y) = \frac{1}{1 - y^2} \Phi\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right)}$.
Résumons Il existe une fonction Φ qui est C^1 sur $]-1, 1[$ telle que $\forall (x, y) \in \ _1, H(x, y) = \frac{1}{1 - y^2} \Phi\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right)$
14. Réciproquement, si Φ est C^1 de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$, la fonction H définie par la formule précédente est solution de (E) su $\ _1$. Vérification sans problème par le calcul .
<u>remarque :</u> La fonction f étudiée dans le préliminaire est de la forme précédente, mais c'est une solution de (E) sur D, dor l'intersection avec $\ _1$ est $[0, 1[\times]0, 1[$.