Spe PC 2

D.S. du 7 Decembre 2002

PROBLEME 1

Définitions :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note id_E l'application identique de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star \quad f^p(x_0) = x_0, \\ \star \quad \text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est génératrice de } E, \\ \star \quad \text{la famille } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts} \end{cases}$$

La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est alors appelée un cycle de f.

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1)\big)$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1),\ f^3(e_1)\big)$ est un cycle de f.

3. Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$.

4. Montrer que A est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

i etant le complexe tel que $i^2 = -1$

et donner une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer : $p \geqslant n$.

2. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. En déduire que f est bijective.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.

 a. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

 b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

 c. En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

4. On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0).$$

 a. On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0\,\mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}$.
 Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.
 En déduire : $f^n = a_0\,\mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}$.

 b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

5 On suppose dans cette question que f est un cycle d'ordre $n = \dim(E)$
que devient la matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0) \ldots f^{n-1}(x_0))$
définie à la question 4.b

 a. Soit $v \in E$ un vecteur non nul tel qu'il existe un complexe λ vérifiant $f(v) = \lambda v$. Montrer que $\lambda^n = 1$.

 b. Soit $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id})$ est une droite vectorielle et calculer x_k un vecteur qui engendre cette droite

 c. Soit $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k = \vec{0}$ une combinaison linéaire nulle des (x_k)
 Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}[X]\quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P(\lambda_k) x_k = \vec{0}$
 En déduire que $(x_k)_{k=0}^{n-1}$ est une famille libre.

 d. Déterminer la matrice de f dans cette base

Rq 5/2 : Rédiger les démonstrations même si certains résultats sont connus.

Problème II

Dans ce problème, on cherche à décrire l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel laissant invariants tous les vecteurs d'un hyperplan donné.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension d avec $d \geq 2$. On considère un hyperplan H de E (i.e. un sous-espace vectoriel de E de dimension $d-1$) et u un endomorphisme de E tel que

$$u(h) = h, \text{ pour tout } h \in H,$$

i.e. laissant invariant tout élément de H.

Préliminaires

Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H.

1. Montrer qu'il existe un unique réel γ et un unique $h_a \in H$ tels que

$$u(a) = \gamma a + h_a.$$

2. Montrer que le réel γ ne dépend pas du choix de $a \notin H$.

Partie I

On suppose dans cette partie que $\gamma \neq 1$.

1) a) Montrer $\exists\, a_0 \notin H \quad u(a_0) = \gamma a_0$

b) Soit $(h_i)_{i=2}^{d}$ une base de H. Justifier que $(a_0, h_2, \dots h_d)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base

c) Montrer $u(x) = \gamma x \iff x \in \mathrm{Vect}(a_0)$ On notera E_γ la droite $\mathrm{Vect}(a_0)$

2. Montrer que les seules droites vectorielles D (i.e. les seuls sous-espaces vectoriels de E de dimension 1) tels que $u(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H ou la droite E_γ.

Soit V un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que si $E_\gamma \subset V$ ou $V \subset H$ alors $u(V) \subset V$.
4. On suppose dans cette question que $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ et l'on désigne par D une droite vectorielle telle que $D \subset V$ et $D \not\subset H$. Justifiez l'existence de D
   (a) Soit $F = E_\gamma + D$. Vérifier que $U(F) \subset F$.
   (b) Montrer que $u(V) \not\subset V$.
5. Déduire des questions précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour que $u(V) \subset V$.