La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

- L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.
- Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
- On note 0_E le vecteur nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.
- On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.
- Si f est un endomorphisme de E on pose

$$f^0 = Id_E,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f,\ etc.$$

- Si f est un endomorphisme de E et si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

est un élément de $\mathbb{R}$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

PARTIE 1
Préliminaires

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1.

a) Montrer que si f et g sont deux endomorphismes qui commutent , le noyau , l'image et les sous espaces propres de g sont stables par f .

b) Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f.

2.

a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

b) Soit ϕ une forme linéaire non nulle de matrice L dans a base $\mathcal{B}$. Montrer que $H = \mathrm{Ker}(\phi)$ est stable par f si et seulement si ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (en donnant une base) tous les sous espaces stables de g .

3. Soit p un entier naturel non nul.

a) Si $F_1, \ldots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

b) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \ldots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k Id_E)^{n_k}$$

est stable par f.

4.

a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$.

b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2?

c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1}?

d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E?

e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

PARTIE 2
Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?

2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.

   a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité:

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k.$$

   b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^{p}(\lambda_k - \lambda_1)x_k$ est élément de F.

   c) Montrer que les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont tous dans F.

3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant les inégalités $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.

4. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur l'un de ses sous-espaces vectoriels stables F est un endomorphisme diagonalisable de F.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre?

PARTIE 3
Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n, c'est-à-dire vérifiant les conditions:

$$f^n = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$

1. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

   a) Vérifier que D^n est nilpotent d'ordre n .

   b) Vérifier que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les n sous-espaces vectoriels suivants:

$$\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \ldots, \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

2.

   a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ vaut 1 si $j = i+1$ et 0 sinon.

b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice B suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

B est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ vaut i si $j = i+1$ et 0 sinon.

c) Déterminer (en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

PARTIE 4
Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

Dans cette partie on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.

1. On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant

$$F_2 \cap \ker f = \{0_E\}.$$

a) Justifier l'inclusion:

$$f(F_2) \subset \ker f.$$

b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

c) Étant donné A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, établir l'inclusion:

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

A-t-on nécessairement l'égalité?

d) Déterminer l'intersection

$$(F_1 + F_2) \cap \ker f.$$

2. Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F.

Vérifier l'inclusion $f(F) \subset F_1$.

3. **Dans cette question,** on suppose que l'entier n est égal à 4 (i.e. $E = \mathbb{R}^4$) et on considère l'endomorphisme h de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est la matrice M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que les sous-espaces vectoriels

$$G_1 = \ker(h - Id)^2 \qquad \text{et} \qquad G_2 = \ker(h - 2I)^2$$

sont supplémentaires.

b) Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par h sont exactement les sommes $H_1 + H_2$ où H_1 (resp. H_2) est un sous-espace vectoriel de G_1 (resp. G_2.) stable par h.

c) Déterminer (en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par h.

PARTIE 5
Existence d'un plan stable par un endomorphisme

Soit f un endomorphisme non nul de E.On supposera $n \geq 2$.

1. **a)** Justifier l'existence d'un polynôme non nul à coefficients réels annulant f.

   b) En déduire l'existence d'un unique polynôme non nul unitaire (coefficient dominant égal à 1) à coefficients réels de plus bas degré annulant f.Ce polynôme est noté M.

   c) que peut-on dire de f si M est un polynôme de degré 1.

2. Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine de M.

3. **Dans cette question,** on suppose que le polynôme M est divisible par un polynôme du second degré à coefficients réels noté $X^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4c < 0$

   a) Montrer que l'endomorphisme $f^2 + bf + cId_E$ n'est pas injectif.

   b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.

4. **Dans cette question,** on suppose qu'il existe un réel λ et un entier p au moins égal à 2 vérifiant l'égalité: $M = (X - \lambda)^p$. On pose $g = f - \lambda Id_E$.

   a) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille

   $$\left(x, g(x), \ldots, g^{p-1}(x)\right)$$

   est libre.

   b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.

5. Montrer que, dans tous les cas, il existe un plan de E stable par f.

6. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer A^4

   b) Déterminer le polynôme M associé .

   c) Calculer un plan stable par g.(En donner un base)