SESSION DE 1999

Filière PC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est autorisé.

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies.

En particulier, les candidats sont priés ***d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.***

NOTATIONS

On désigne par R l'ensemble des réels et par (E) l'équation:

$$2y\,\phi\,(x,y) + (1-x^2)\,\frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}(x,y) - (1-y^2)\,\frac{\partial\,\phi}{\partial\,y}(x,y) = 0 \qquad .$$

On dira que ϕ est une solution de (E) sur un ouvert Δ de R^2 si et seulement si :

i) ϕ est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert Δ de R^2.

ii) L'équation (E) est vérifiée pour tout couple (x,y) de Δ.

PRELIMINAIRES

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

On note D l'ensemble des couples de réels (x,y) pour lesquels cette expression a un sens.

Représenter l'ensemble D dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ puis établir que D est un ouvert de R^2.

2. Prouver que f est de classe C^1 sur D.

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(1-y^2)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y)$ pour (x,y) dans D puis démontrer que f est une solution de (E) sur D.

4. Pour $x > 0$ et $y \in]0,1[$ comparer $f(x,y)$ et $f(\frac{1}{x},y)$.

5. Etablir l'inégalité suivante:

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad \forall y \in]0,1[\quad \left|\ln(\frac{x+y}{1+xy})\right| \leq |\ln y|$$

6. Prouver que $y \to f(0,y)$ est intégrable sur $]0,1[$.En déduire que pour tout $x \geq 0$ la fonction $y \to f(x,y)$ est intégrable sur $]0,1[$.

On définit alors sur $[0,+\infty[$ la fonction F par :

$$F(x) = \int_{]0,1[} f(x,y)dy$$

PARTIE I : ETUDE DE F

7. a) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Pour $x>0$ comparer $F(x)$ et $F(\frac{1}{x})$. Que vaut $F(1)$?

c) Exprimer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ à l'aide de $F(0)$.

8. a) Calculer $\displaystyle\sum_0^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ en développant en série de Fourier la fonction φ , 2π-périodique paire, définie par : $\forall t \in [0,\pi]\quad \varphi(t) = t$.

b) En développant $\dfrac{1}{1-y^2}$ en série entière, pour $y \in]-1\ ,\ 1\ [$, déterminer $F(0)$.

9. a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.Comparer le résultat obtenu et $f(0,x)$.

c) En déduire $F'(1)$. Déterminer la demi-tangente à droite à la courbe représentative de F pour $x = 0$.

10. A l'aide des résultats précédents, construire la courbe représentative de F.

PARTIE II :RESOLUTION DE (E)

11. Soit Ω et Ω' les ouverts de R^2 suivants:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ \ y < x\right\}$$
$$\Omega' = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ \ x^2 > 4y\right\}$$

On considère l'application Ψ de Ω dans R^2:

$$\Psi: \ (x,y) \to (x+y, xy)$$

a) Etablir que Ψ est une bijection de classe C^1 de Ω sur Ω'.

b) Calculer le jacobien de Ψ et en déduire que Ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur Ω'.

12. Soit g une fonction de classe C^1 sur Ω.

a) Montrer qu'il existe une application $h: \Omega' \to R^2$

$$(u,v) \mapsto h(u,v)$$

de classe C^1 sur Ω' telle que:

$$\forall (x,y) \in \Omega \quad g(x,y) = h(x+y, xy)$$

b) Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

i) $\forall (x,y) \in \Omega \quad \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

ii) $\forall (u,v) \in \Omega' \quad \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0$

13. Soit H une solution de (E) sur $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \left]-1, 1\right[^2 \ / \ y < x \right\}$ et G définie sur Ω par

$$G(u,v) = (1 - th^2 v) H(thu, thv)$$

où *th* désigne la fonction tangente hyperbolique.

a) Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ à l'aide des dérivées partielles de H.

b) Déduire de la question 12) qu'il existe une fonction Φ de classe C^1 sur $\left]-1, 1\right[$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \Omega_1 \quad H(x,y) = \frac{1}{1-y^2} \Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

[Indications : On pourra transformer cette égalité en posant $x = th\,X$ et $y = th\,Y$ sachant que la fonction *th* est un difféomorphisme de R sur l'intervalle $\left]-1, 1\right[$ et que $th(u+v) = \dfrac{thu + thv}{1 + thu.thv}$]

14. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur Ω_1.
