

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

Le but de ce problème est l'étude d'une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles.

**Première partie**

On fixe un entier  $n \in \mathbb{N}$  et l'on désigne par  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à  $n$ . On considère la forme linéaire  $L$  sur  $E$  définie par

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx.$$

1. Déterminer l'image par  $L$  de la fonction polynomiale  $P$  telle que  $P(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$ .

Déterminer la dimension du noyau de  $L$ , puis une base de ce noyau.

2. On considère des nombres réels  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  tels que

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n \leq 1.$$

a) Montrer que, pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , il existe une fonction polynomiale  $P_i \in E$  telle que

$$P_i(x_i) = 1$$

et  $P_i(x_j) = 0$  pour  $j \neq i$ ,  $0 \leq j \leq n$ .

b) Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$  telle que

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$

3. On suppose que, pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $x_{n-i} = -x_i$ . Montrer que  $\lambda_{n-i} = \lambda_i$ . En déduire que, si  $n$  est pair, toute fonction polynomiale  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n+1$  vérifie

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$

4. Soit  $f$  une fonction réelle de classe  $C^{n+1}$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

a) On pose  $M_{n+1} = \sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|$ , où  $f^{(n+1)}$  désigne la dérivée  $(n+1)$ -ième de  $f$ . Déterminer des réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \right| \leq M_{n+1} (\alpha + \beta \sum_{i=0}^n |\lambda_i|)$$

où les  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$  sont les nombres réels déterminés à la question 2..

b) On suppose que  $f$  est de classe  $C^{n+2}$  sur  $[-1, 1]$ , que  $n$  est pair et que les points  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  sont choisis tels que  $x_{n-i} = -x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Modifier la majoration précédente en utilisant  $M_{n+2} = \sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+2)}(x)|$ .

5. On suppose que  $n = 4$  et l'on choisit

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 1.$$

a) Calculer  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ .

b) En utilisant le résultat de la question 4.b), donner une majoration de  $\left| \int_{-1}^1 e^{(x/4)^2} dx - \sum_{i=0}^4 \lambda_i e^{(x_i/4)^2} \right|$ , où les  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq 4}$  sont les nombres trouvés en a).

## Deuxième partie

Les notations sont celles de la première partie.

6. Soit  $N$  une norme sur  $E$ . On pose

$$\mathcal{N}(L) = \sup_{\substack{P \in E \\ N(P) \leq 1}} |L(P)|$$

a) Justifier l'existence de  $\mathcal{N}(L)$  et montrer qu'il existe  $Q \in E$  tel que  $N(Q) = 1$  et  $|L(Q)| = \mathcal{N}(L)$ .

b) Montrer que si  $K$  est un nombre réel positif tel que

$$\forall P \in E, \quad |L(P)| \leq K N(P),$$

alors  $\mathcal{N}(L) \leq K$ . Montrer que si, de plus, il existe  $Q \in E$  tel que  $N(Q) = 1$  et  $|L(Q)| = K$ , alors  $\mathcal{N}(L) = K$ .

7. Pour  $P \in E$  tel que  $P(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$ , on pose

$$N_\infty(P) = \sup_{0 \leq p \leq n} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left( \sum_{p=0}^n (a_p)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comparer les normes  $N_\infty$  et  $N_2$ .

8. On désigne par  $\mathcal{N}_\infty(L)$  et  $\mathcal{N}_2(L)$  les nombres  $\mathcal{N}(L)$  définis à la question 6., quand on choisit pour  $N$  respectivement  $N_\infty$  et  $N_2$ .

a) Trouver  $Q_\infty \in E$  tel que  $N_\infty(Q_\infty) = 1$  et  $|L(Q_\infty)| = \mathcal{N}_\infty(L)$ .

b) Trouver  $Q_2 \in E$  tel que  $N_2(Q_2) = 1$  et  $|L(Q_2)| = \mathcal{N}_2(L)$ .

### Troisième partie

Soit  $F$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré quelconque.

Pour  $P \in F$ , de degré  $d(P)$ , définie par  $P(x) = \sum_{p=0}^{d(P)} a_p x^p$ , on pose

$$N_\infty(P) = \sup_{0 \leq p \leq d(P)} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left( \sum_{p=0}^{d(P)} (a_p)^2 \right)^{1/2}$$

et l'on définit ainsi des normes sur  $F$  [par convention,  $N_\infty(0) = N_2(0) = 0$ ].

Pour  $P \in F$ , on pose encore  $L(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx$ .

9.a) Trouver une suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}, N_\infty(P_k) = 1$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} L(P_k) = +\infty$ .

b) L'application linéaire  $L$  est-elle continue ?

10.a) Montrer que  $\sup_{\substack{P \in F \\ N_2(P) \leq 1}} |L(P)|$  existe. On désigne ce nombre par  $\|L\|$ .

b) Existe-t-il une fonction polynomiale  $Q \in F$  telle que  $N_2(Q) = 1$  et  $|L(Q)| = \|L\|$  ?

---