CENTRALE
TSI 2000
MATH 2

PREMIERE PARTIE

I.A.1) $M\in S_2(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe 3 complexes (a,b,c) tels que $M=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ .Donc

$$S_2(\mathbb{C})=Vect\,(A,B,C)\ \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

De plus ces trois matrices forment un système libre

$$aA+bB+cC=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=b=c=0$$

$\boxed{S_2(\mathbb{C})\text{ est un espace vectoriel complexe de dimension 3}}$

I.A.2)*Remarque:il y a deux questions à résoudre : matrice symétrique et matrice inversible :*
·On a ${}^t\left({}^tPMP\right)={}^tP\,{}^tM\,{}^t\left({}^tP\right)={}^tPMP$ car M est symétrique et ${}^t\left({}^tP\right)=P$ dont ${}^tPMP$ est symétrique.
·Un matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul .Or

$$\begin{aligned}\det\left({}^tPMP\right)&=\det\left({}^tP\right)\det(M)\det(P)\\&=\det(M)\left(\det(P)\right)^2\neq 0\end{aligned}$$

${}^tPMP$ est donc un matrice inversible de $S_2(\mathbb{C})$, il en est de même pour ${}^tPNP$.
On a maintenant M harmonique relativement à N, soit X,X' qui réalise cette harmonie et $Y=P^{-1}X$ et $Y'=P^{-1}X'$, (Y,Y') est bien une base de $\mathbb{C}^2$:
·on a deux vecteurs en dimension 2 .
·Le système est libre :

$$\begin{aligned}aY+bY'&=0\Leftrightarrow P^{-1}(aX+bX')=0\Leftrightarrow aX+bX'=0\text{ (en multipliant par }P)\\&\Leftrightarrow a=b=0\text{ (car }(X,X')\text{ est un système libre)}\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{gathered}{}^tY\,{}^tPMPY={}^t(PY)\,M\,(PY)={}^tXMX=0\\{}^tY'\,{}^tPMPY'={}^t(PY')\,M\,(PY')={}^tX'MX'=0\\{}^tY\,{}^tPNPY'={}^t(PY)\,N\,(PY')={}^tXNX'=0\end{gathered}$$

Ce qui assure que $\boxed{{}^tPMP\text{ est harmonique relativement à }{}^tPNP}$.
I.B.1) Tout d'abord,$\det(M)=-b^2$ donc $b\neq 0$ équivaut à M non inversible. <u>b est bien non nul.</u>
On pose $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}{}^tXMX&=(x,y)\begin{pmatrix} 0 & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\\&=2bxy+cy^2=y\,(2bx+cy)\\&=0\end{aligned}$$

On obtient donc les deux droites vectorielles d'équation $y=0$ et $2bx+cy=0$. Les vecteurs cherchés sont de la forme $\left(\lambda\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix},\mu\begin{pmatrix} c\\ -2b\end{pmatrix}\right)$ avec λ,μ non nuls. Ils constituent bien une base car leur déterminant $-2\lambda\mu b$ est non nul.

- Prenons $X=\lambda\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $X'=\mu\begin{pmatrix} c\\ -2b\end{pmatrix}$. On a l'harmonie si et seulement si :

$$^tXNX'=\lambda\mu\,(1,0)\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\\ -2b\end{pmatrix}=\lambda\mu\,(\alpha c-2b\beta)=0$$

  Ce qui assure le résultat car $\lambda\mu\neq 0$

- Prenons $X' = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \mu \begin{pmatrix} c \\ -2b \end{pmatrix}$. On a l'harmonie si et seulement si :

$$^{t}XNX' = \lambda\mu(c, -2b) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\mu\left(\alpha c - 2b\beta\right) = 0$$

I.B.2) On a maintenant $^{t}XMX = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ qui est une équation du second degré en x puisque a est non nul. Or $d \neq 0$ car la matrice M est inversible .L'équation admet donc deux racines distinctes
Les racines sont $x = \dfrac{-b+d}{a}y$ ou $x = \dfrac{-b-d}{a}y$. $^{t}XMX = 0$ correspond encore à deux droites vectorielles engendrées par $\begin{pmatrix} -b-d \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b+d \\ a \end{pmatrix}$.
Prenons $X = \lambda \begin{pmatrix} -b-\varepsilon d \\ a \end{pmatrix}$ et $X' = \mu \begin{pmatrix} -b+\varepsilon d \\ a \end{pmatrix}$ avec λ et μ non nuls et $\varepsilon = \pm 1$ .On a $\det(X, X') = \varepsilon\lambda\mu(-2ad) \neq 0$. (X, X') est une base de $\mathbb{C}^2$.
On a donc l'harmonie si et seulement si :

$$\begin{aligned} ^{t}XNX' &= \lambda\mu\left(-b-\varepsilon d, a\right) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b+\varepsilon d \\ a \end{pmatrix} \\ &= \lambda\mu\left(\alpha\left(b^2 - d^2\right) - 2ab\beta + \gamma a^2\right) \\ &= a\left(\alpha c - 2b\beta + \gamma a\right) = 0 \text{ car } b^2 - d^2 = ac \end{aligned}$$

Comme a est non nul, on obtient bien la condition $\alpha c - 2b\beta + \gamma a = 0$.
Cette condition est compatible avec la condition précédente avec $a = 0$.

$$\boxed{M \text{ est harmonique relativement à } N \text{ si et seulement si } \alpha c + \gamma a = 2\beta b}$$

I.B.3) Les rôles joués par a, b, c et α, β, γ étant symétriques, M harmonique relativement à N entraîne N harmonique relativement à M.

$$\boxed{M \text{ est harmonique relativement à } N \text{ si et seulement si } N \text{ est harmonique relativement à } M}$$

I.C) Par un calcul classique, on obtient

$$N^{-1} = \frac{1}{\beta^2 - \alpha\gamma} \begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$tr\left(N^{-1}M\right) = \frac{1}{\beta^2 - \alpha\gamma}\left(a\gamma - 2b\beta + c\alpha\right)$$

On a bien la nullité de la trace si et seulement si on a l'harmonie.

$$\boxed{tr(N^{-1}M) = 0 \Leftrightarrow M \text{ et } N \text{ sont conjugués harmoniques}}$$

I.D) L'application $\phi : S_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associe $a\gamma - 2b\beta + c\alpha$ est clairement une forme linéaire non nulle, , puisque N est non nulle et qu'on arrive dans $\mathbb{C}$.
$\mathcal{H}$ qui n'est que son noyau est un hyperplan de $S_2(\mathbb{C})$ donc un sous espace vectoriel de dimension 2 .
D'autre part, on remarque que $\phi(N) = tr\,(I) = 2$, ce qui prouve que $\phi(N) \neq 0$. On peut alors conclure que :

$$\boxed{\ker(\phi) \text{ et } Vect(N) \text{ sont deux sous espaces supplémentaires}}$$

Remarque : On peut refaire les calculs mais c'est plus long . Il est utile de savoir reconnaître le cours .
I.E.1) On sait que la trace est une application linéaire.Si le système est lié , l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres . Pour simplifier l'écriture, on va supposer que M_1 est combinaison linéaire des autres matrices. La démonstration est symétrique dans les autres cas . Si on a :

$$M_1 = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i M_i$$

Alors :

$$tr\left(M_1^{-1}M_1\right) = tr\,(I) = 2 = tr\left(M_1^{-1}\sum_{i=2}^{k}\lambda_i M_i\right) = \sum_{i=2}^{k}\lambda_i tr\left(M_1^{-1}M_i\right) = 0$$

d'où la contradiction.
I.E.2) Si une famille est liée, l'une des matrices est combinaison linéaire des autres, ce qui est impossible dans une famille harmonique.
Comme on est dans un espace de dimension 3, il ne peut y avoir de famille harmonique de plus de 3 matrices et une famille harmonique de 3 matrices est une base.

I.F) Compte tenu de la propriété IB, si B est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, A et B sont harmoniques si et seulement si $\lambda c + \mu a = 0$, système linéaire de rang 1 à 3 inconnues (a, b et c).L'ensemble des solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2 . Pour trouver la forme des solutions proposées par le sujet on prend

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\mu \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On fait la même chose pour A et C en appelant α' et β' les paramètres.
Maintenant, il nous faut de plus B et C harmoniques, c'est à dire

$$-\alpha\alpha'\lambda\mu - \alpha\alpha'\lambda\mu = 2\beta\beta'$$

ou encore

$$\alpha\alpha'\lambda\mu + \beta\beta' = 0$$

On cherche à calculer C en fonction de B .On a alors un système linéaire de rang 1 à 2 inconnues (α', β')
Les solutions sont de la forme

$$\alpha' = \beta k, \quad \beta' = -\alpha\lambda\mu \ k \in \mathbb{C}.$$

Les triplets harmonique sont donc les triplets de matrices inversibles du type:

$$\boxed{\begin{array}{c} A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta \\ \beta & -\alpha\mu \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} \beta\lambda k & -\alpha\lambda\mu k \\ -\alpha\lambda\mu k & -\beta\mu k \end{pmatrix} \end{array}}$$

avec $(\lambda, \mu, \alpha, \beta, k) \in \mathbb{C}^5$
Enfin, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda\mu \\ \det(B) &= -\left(\alpha^2\lambda\mu + \beta^2\right) \\ \det(C) &= -k^2\lambda\mu\left(\alpha^2\lambda\mu + \beta^2\right) \\ \det(B)\det(C) &= k^2\lambda\mu\left(\alpha^2\lambda\mu + \beta^2\right)^2 \\ &= k^2\left(\alpha^2\lambda\mu + \beta^2\right)^2 \det(A) \end{aligned}$$

qui est du signe de $\det(A)$.

I.G) Le triplet $({}^tPA_0P, {}^tPB_0P, {}^tPC_0P)$ est harmonique d'après la question I A 2)
En admettant le résultat indiqué avec (A, B, C) un triplet harmonique,on peut trouver P inversible tel que ${}^tPAP$ soit diagonale et $({}^tPAP, {}^tPBP, {}^tPCP)$ est aussi un triplet harmonique donc de la forme du I.F). On pose $Q = P^{-1}$, les triplets harmoniques sont donc de la forme $({}^tQAQ, {}^tQBQ, {}^tQCQ)$ avec A, B, C de la forme obtenue au I.F).
Enfin, dans le cas où les matrices sont réelles, on a vu que $({}^tPAP, {}^tPBP, {}^tPCP)$ correspondait à un changement de base. Le déterminant est invariant dans un changement de base. Donc les déterminants sont ceux du I.F) dont on a vu que le produit des 3 était strictement positif.

I.H) On pose $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$, on veut donc :

$$\forall (a, b, ; c) \in \mathbb{C}^3 \ , tr(SM) = ax + b(y+z) + ct = 0$$

. On obtient donc $x = 0$, $y + z = 0$, $t = 0$. M est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix}$.

Prenons $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$, on a bien D inversible vérifiant

$$tr\left(A^{-1}D\right) = tr\left(B^{-1}D\right) = tr\left(C^{-1}D\right) = 0$$

car A^{-1} est symétrique ainsi que les deux autres.
(A, B, C, D) est une base car c'est une famille libre. Ceci découle simplement que D n'est pas symétrique donc pas élément de l'hyperplan $S_2(\mathbb{C})$, et que (A, B, C) est libre.

DEUXIEME PARTIE

Remarque : la définition de $z_1 = -b + d \cdots$ me semble vous inciter à faire du calcul en utilisant b et d.Alors que l'important c'est la somme et le produit des racines d'une équation du second degré .

II.A.1) 1 ou -1 solution de (1) ou de (2) entraîne $b = -1$ ou $b = 1$ œ qui implique $\det(B) = 0$ et B non inversible.
D'autre part, si (1) et (2) ont une solution commune, elle est racine de la première, donc non nulle. Et $(2) - b(1)$ donne $2\left(1 - b^2\right) z = 0$ et encore une fois $b = -1$ ou $b = 1$ ce qui est impossible.

II.A.2) On a $z_1 z_1' = 1$ et $z_2 z_2' = \frac{b}{b} = 1$ d'après la propriété du produit des racines d'une équation du second degré . Donc

$$\frac{z_i - 1}{zi + 1} = \frac{\frac{1}{z_i'} - 1}{\frac{1}{z_i'} + 1} = \frac{1 - z_i'}{1 + z_i'} = -\frac{z_i' - 1}{z_i' + 1}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\left(z_2 - z_1\right)\left(z_2' - z_1'\right) + \left(z_2 - z_1'\right)\left(z_2' - z_1\right) \\
&= 2z_2 z_2' + 2z_1 z_1' - \left(z_1 z_2' + z_2 z_1' + z_1 z_2 + z_1' z_2'\right) \\
&= 2p_2 + 2p_1 - \left(z_1 + z_1'\right)\left(z_2 + z_2'\right) = 2p_2 + 2p_1 - s_1 s_2
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(z_2 - z_1\right)}{\left(z_2 - z_1'\right)} + \frac{\left(z_2' - z_1\right)}{\left(z_2 - z_1'\right)} &= \frac{\left(z_2 - z_1\right)\left(z_2' - z_1'\right) + \left(z_2 - z_1'\right)\left(z_2' - z_1\right)}{\left(z_2 - z_1'\right)\left(z_2 - z_1'\right)} \\
&= \frac{2p_2 + 2p_1 - s_1 s_2}{\left(z_2 - z_1'\right)\left(z_2 - z_1'\right)} = \frac{2 + 2 - (-2b)(-2/b)}{\left(z_2 - z_1'\right)\left(z_2 - z_1'\right)} = 0
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{z_i - 1}{zi + 1} = -\frac{z_i' - 1}{z_i' + 1}, \frac{\left(z_2 - z_1\right)}{\left(z_2 - z_1'\right)} = -\frac{\left(z_2' - z_1\right)}{\left(z_2 - z_1'\right)}}$$

II.A.3)$\varphi(z)$ est défini si $z \neq -i$.$\varphi(\varphi(z))$ est donc défini si $z \neq -i$ et $\phi(z) \neq -i$ soit $z \notin \{0, -i\}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi(z)) &= \frac{\dfrac{z - i}{1 - zi} - i}{1 - \dfrac{z - i}{1 - zi} i} = \frac{\dfrac{z - i - i(1 - zi)}{1 - zi}}{\dfrac{1 - zi - (z - i) i}{1 - zi}} \\
&= \frac{z - i - i - z}{1 - zi - zi - 1} = \frac{-2i}{-2zi} \\
&= \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si } z \notin \{0, -i\} \text{ alors } \phi \circ \phi(z) = \tfrac{1}{z}}$$

II.A.4)

$$\begin{aligned}
b\left(\frac{z - i}{1 - zi}\right)^2 + 2\frac{z - i}{1 - zi} + b &= \frac{b(z - i)^2 + 2(1 - zi)(z - i) + b(1 - zi)^2}{(1 - zi)^2} \\
&= \frac{b\left(z^2 - 2iz - 1 + 1 - 2iz - z^2\right) + 2\left(z - i - iz^2 - z\right)}{(1 - zi)^2} \\
&= \frac{b(-4iz) - 2i\left(z^2 + 1\right)}{(1 - zi)^2} = \frac{-2i}{(1 - zi)^2}\left(z^2 + 2bz + 1\right)
\end{aligned}$$

Pour $1-iz$ non nul, on a bien z solution de (1) si et seulement si $\varphi(z)$ est solution de (2).

II.B.1) On a $z\overline{z}=x^2+y^2$ et $z-\overline{z}=2iy$ ce qui donne bien

$$z\overline{z}-t\frac{z-\overline{z}}{2i}-1=x^2+y^2-ty-1$$

Annuler ce terme donne bien l'équation d'un cercle. De plus, si un cercle passe par P et P', son centre est sur Oy .Notons $=(0,t/2)$ le centre . Le cercle est d'équation

$$x^2+y^2-ty-k=0$$

Comme il passe par P, k vaut 1. On a bien le résultat demandé.

$$\begin{aligned}F(X,Y)&=\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}-t\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}}{2i}-1=\frac{1-t\frac{\overline{z}-z}{2i}-z\overline{z}}{z\overline{z}}\\&=\frac{-1}{z\overline{z}}\left(z\overline{z}-t\frac{z-\overline{z}}{2i}-1\right)\\&=-\frac{F(x,y)}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Pour z non nul, $F(X,Y)=0\Leftrightarrow F(x,y)=0$ ce qui correspond à :

$$\boxed{M(z)\text{ appartient au cercle si et seulement si }M(1/z)\text{ appartient au cercle.}}$$

II.B.2) La droite (PP') étant la droite réelle, montrer que $P,P'Q$ ne sont pas alignés revient à montrer que z_1 n'est pas réel. Mais, comme z_1 n'est pas nul, $b=\dfrac{-1-z_1^2}{2z_1}$ serait donc aussi réel ce qui est contraire à l'hypothèse.
On considère donc le cercle circonscrit au triangle $PP'Q$. Comme on a $Q=M(z_1)$ et $Q'=M(1/z_1)$ la question précédente montre que comme Q est sur le cercle $\mathcal{C}$, Q' est aussi sur ce cercle $\boxed{P,P',Q,Q'\text{ sont cocycliques.}}$
On fait la même chose à partir de R :
Si z_2 est réel $b=\frac{2z_2}{z_2+1}$ est réel . Donc P,P',R ne sont pas alignés . Ensuite $z_2'=1/z_2$ montre que R' est sur le cercle passant par P,P',R . $\boxed{P,P',R,R'\text{ sont cocycliques.}}$

II.B.3) On a

$$\begin{aligned}(z-\psi(z_1))(z-\psi(z_1'))=0\\&=\left(z-\frac{z_1-1}{z_1+1}\right)\left(z-\frac{z_1'-1}{z_1'+1}\right)\\&=z^2-z\underbrace{\left(\frac{z_1-1}{z_1+1}+\frac{z_1'-1}{z_1'+1}\right)}_{=0}+\left(\frac{z_1-1}{z_1+1}\right)\left(\frac{z_1'-1}{z_1'+1}\right)\\&=z^2+\frac{z_1z_1'-(z_1+z_1')+1}{z_1z_1'+(z_1+z_1')+1}=z^2+\frac{1+2b+1}{1-2b+1}\\0&=z^2+\frac{1+b}{1-b}\end{aligned}$$

qui est l'équation cherchée. On fait la même chose avec les racines de l'autre équation, ce qui revient à remplacer b par $\dfrac{1}{b}$.
L'équation dont les racines sont $\psi(z_2)$ et $\psi(z_2')$ est :

$$0=z^2+\frac{1+1/b}{1-1/b}=z^2-\frac{1+b}{1-b}$$

$\psi(z_1),\psi(z_1'),\psi(z_2)$ et $\psi(z_2')$ sont dont des racines de :

$$z^4-\left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2=0$$

Ce sont donc des racines quatrièmes de $\left(\dfrac{1+b}{1-b}\right)^2$,
De plus ψ est une bijection de $\mathbb{C}-\{-1\}$ sur $\mathbb{C}-\{1\}$, de fonction réciproque $\psi^{-1}(z)=\frac{1+z}{1-z}$.

z_1, z_1', z_2, z_2' étant deux à deux distincts (question IIA1) , $\psi(z_1), \psi(z_1'), \psi(z_2), \psi(z_2')$ sont deux à deux distincts .Ce sont donc les quatres racines de l'équation :

$$z^4 - \left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2 = 0$$

Si z_0 est l'une de ces racines l'ensemble des racines est alors $\{z_0, iz_0, -z_0, -iz_0\}$ et on passe d'un sommet à un autre par rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Leurs images sont bien les sommets d'un carré de centre O. Ils sont donc cocycliques. sur un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt[4]{\left|\left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2\right|} = \sqrt{\left|\frac{1+b}{1-b}\right|}$ et son équation

$$z\overline{z} = \left|\frac{1+b}{1-b}\right|$$

Enfin, Q, Q', R, R' ont des affixes qui vérifient donc

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} \times \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} &= \left|\frac{1+b}{1-b}\right| \\ &= \frac{z\overline{z} - (z+\overline{z}) + 1}{z\overline{z} + (z+\overline{z}) + 1} \\ \left|\frac{1+b}{1-b}\right| &= \frac{x^2+y^2-2x+1}{x^2+y^2+2x+1} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(x^2+y^2)\left(1 - \left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right) - 2x\left(1 + \left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right) + \left(1 - \left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right) = 0$$

qui est l'équation d'un cercle sauf quand $\left|\frac{1+b}{1-b}\right| = 1$ auquel cas, il s'agit d'une droite.

$$\boxed{Q, Q', R, R' \text{ sont donc cocycliques ou alignés.}}$$

La condition $\left|\frac{1+b}{1-b}\right| = 1$ équivaut à $|1-b| = |1+b|$, le point d'affixe b est donc sur la médiatrice de PP' donc sur Oy :si $b \notin i\mathbb{R}$, Q, Q', R, R' sont cocycliques
II.B.4) On a $\overrightarrow{TQ}$ d'affixe $z_1 - \frac{z_1 + \overline{z_1}}{1 + z_1\overline{z_1}}$ et $\overrightarrow{TQ'}$ d'affixe $z_1' - \frac{z_1 + \overline{z_1}}{1 + z_1\overline{z_1}}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z_1' - \frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}}{z_1 - \frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}} &= \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}}{z_1 - \frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}} \text{ toujours par le produit des racines} \\ &= \frac{(1+z_1\overline{z_1}) - z_1(z_1+\overline{z_1})}{z_1^2(1+z_1\overline{z_1}) - z_1(z_1+\overline{z_1})} \text{ en éliminant les dénominateurs} \\ &= -\frac{1}{z_1\overline{z_1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-1}{|z_1|^2} \text{ est bien un réel}}$$

. Ce qui prouve que T, Q, Q' sont alignés. De plus ω est réel, ce qui fait que T, P, P' sont aussi alignés. L'intersection de (PP') et (QQ') est T.

On sait aussi que $\varphi(z_1)$ est z_2 ou z_2' et que $\varphi(z_1')$ est l'autre racine d'après le II.A.4). Calculons

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(z_1)+\overline{\varphi(z_1)}}{1+\varphi(z_1)\overline{\varphi(z_1)}} &= \frac{\dfrac{z_1-i}{1-z_1 i}+\dfrac{\overline{z_1}+i}{1+\overline{z_1}i}}{1+\dfrac{z_1-i}{1-z_1 i}\times\dfrac{\overline{z_1}+i}{1+\overline{z_1}i}} \\
&= \frac{(z_1-i)(1+\overline{z_1}i)+(1-z_1 i)(\overline{z_1}+i)}{(1-z_1 i)(1+\overline{z_1}i)+(z_1-i)(\overline{z_1}+i)} \\
&= \frac{iz_1\overline{z_1}+z_1-i+\overline{z_1}+\overline{z_1}-z_1\overline{z_1}i+i-z_1\overline{z_1}i+z_1}{1-z_1 i+\overline{z_1}i+z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}-i\overline{z_1}+z_1 i+1} \\
&= \frac{2(z_1+\overline{z_1})}{2(1+z_1\overline{z_1})}=\frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}} \\
&= \omega
\end{aligned}$$

En remplaçant dans le calcul précédant z_1 par $\varphi(z_1)$ et z_1' par $\varphi(z_1')=1/\varphi(z_1)$ on obtient $\lambda'=\frac{-1}{|\varphi(z_1)|^2}\in\mathbb{R}$.
Ce qui prouve maintenant que T, R, R' sont alignés.
Et enfin on obtient $\boxed{(PP'), (QQ') \text{ et } (RR') \text{ sont concourrantes en } T}$.